

Домашнее задание по стереометрии № 5

Задача 1

1. Пусть $\vec{c} - \vec{b} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c} + \vec{a}$. Следует ли из этого, что $\vec{c} - \vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{c} + \vec{b}$?
2. Пусть $\overrightarrow{BX} + 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{AY} - \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$. Рассмотрим векторы \overrightarrow{XY} , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} . Будет ли вектор \overrightarrow{XY} линейной комбинацией векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} ?
3. $ABCD$ — тетраэдр. Точки M, N, P, Q таковы, что $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DP} = y\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = \vec{0}$. Найдите x и y .
4. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют общую точку пересечения медиан. При этом $\overrightarrow{B_1A} = \vec{a}$, $\overrightarrow{A_1B} = \vec{b}$. Чему равен вектор $\overrightarrow{CC_1}$?

Задача 2

Пусть $PABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны 1.

1. Вычислите:
а) $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD}$; б) $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{DA}$; г) $\overrightarrow{PB} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$; д) $(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB})$.
2. Найдите такую точку X :
а) на прямой BA , что $PB \perp DX$; б) на прямой PB , что $DA \perp CX$.

Задача 3

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. Точка K — центр грани $A_1 B_1 C_1 D_1$, точка L — центр грани $AA_1 B_1 B$, точка M — центр треугольника $CB_1 A$, точка T — центр тетраэдра $B_1 A C D_1$. Пусть \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{CB} , $\overrightarrow{CC_1}$ — базис. Найдите коэффициенты разложения по этому базису векторов:

- 1) \overrightarrow{CK} , 2) \overrightarrow{AK} , 3) \overrightarrow{KL} , 4) \overrightarrow{BM} , 5) $\overrightarrow{D_1 T}$.

Задача 4

1. Пусть в некотором базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ даны координаты трёх векторов: $\vec{a} = (-1; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; -2; 0)$, $\vec{c} = (0; 1; -2)$.
а) Докажите, что векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} сами образуют базис.
б) Каковы координаты вектора $3\vec{a} - \vec{e}_2 + 2\vec{b} - 3\vec{e}_1$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$?
2. Вектор \vec{x} имеет одинаковые координаты в ортонормированном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и в базисе $\{\vec{k}, \vec{i}, -\vec{j}\}$. Что это за вектор?

Задача 5

1. Даны координаты двух векторов в ортонормированном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$: $\vec{a} = (-1; 2; 2)$, $\vec{b} = (1; 0; 1)$. Найдите:
а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $|\vec{a}| - |\vec{b}|$; в) $\angle \vec{a}, (\vec{a} + \vec{b})$.
2. Пусть $\vec{x} \cdot \vec{i} = \vec{x} \cdot \vec{j} = 0.5$, $|\vec{x}| = 1$. Чему равно $\vec{x} \cdot \vec{k}$?
3. $\vec{a} = (0; x; 1)$, $\vec{b} = (x; 1; 0)$. В каких границах лежит угол между \vec{a} и \vec{b} ?

Задача 6

Даны три точки A, B, C , не лежащие на одной прямой.

1. Докажите, что существует точка X , такая, что $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} - 3\overrightarrow{XB} = \alpha\overrightarrow{AC}$.
2. Верно ли, что:
 - а) $X \in (ABC)$ при любом α ;
 - б) X лежит в полуплоскости, определяемой прямой AC и точкой B ?
3. При каких α :
 - а) X принадлежит одной из трех прямых : AB, AC или BC ;
 - б) X лежит между какими-то двумя из данных точек;
 - в) X лежит внутри угла ACB ?
4. Лежит ли точка X в треугольнике ABC ?

Задача 7

Четыре точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Пусть M_1 — точка пересечения медиан треугольника ACD , M_2 — точка пересечения медиан треугольника ABC , M_3 — середина CD , M_4 — середина BC .

1. Есть ли среди прямых, определяемых точками M_1, M_2, M_3, M_4 , параллельные?
2. Пересекаются ли плоскости AM_3M_2 и прямая BD ?
3. Докажите, что прямые M_3M_1 и M_4M_2 пересекаются.
4. Пусть M_3M_2 пересекает плоскость ABD в точке K , M_4M_1 пересекает плоскость ABD в точке L . Найдите отношение $KL : M_3M_4$.

Задача 8

Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны 2. Вычислите:

- а) угол между прямыми A_1K и B_1L , где K — середина AB , L — середина BC ;
- б) расстояние от точки K до прямой C_1L ;
- в) принадлежит ли этой призме общий перпендикуляр прямых A_1K и B_1L ?