15.9.(3). Четыре плоскости расположены так, что никакие три из них не проходят через одну прямую, а все четыре не имеют общей точки. Сколько существует сфер, касающихся этих плоскостей?

Планируем

15.10.(2). а) На данной сфере даны три точки. Расстояния между этими точками известны. Как найти расстояние от центра сферы до плоскости, проходящей через эти точки? до треугольника с вершинами в этих точках? б) Каждая сторона данного треугольника имеет с данной сферой единственную общую точку. Как найти расстояние от центра сферы до плоскости треугольника? до самого треугольника?

15.11.(3). Через одну прямую проведены к шару две опорные плоскости. Известны радиус шара и расстояние между точками касания шара с этими плоскостями. Как найти угол между этими плоскостями? Как найти расстояние от шара до общей прямой этих плоскостей? Выберите сами числовые данные и получите результат.

15.12.(3). На плоскости лежат три шара известных радиусов. Каждые два из них касаются. К ним проведена еще одна общая опорная плоскость. Как найти угол, который она составляет с данной плоскостью?

15.13.(3). Шар касается плоскости α в точке A. Его радиус R. Плоскость β пересекает шар по кругу радиусом r. С плоскостью α плоскость β образует угол φ. Как найти расстояние от A до прямой пересечения α и β?

Находим величину

15.14.(2). Найдите длину шестидесятой параллели Земли. Во сколько раз она длиннее такой же параллели на Луне? Решите задачу в общем случае для произвольной параллели.

15.15.(2). а) На сфере радиусом 2 расположены три окружности радиусом 1, каждые две из них касаются. Как вычислить радиус окружности, расположенной на этой сфере и касающейся каждой из данных окружностей? б) На сфере радиусом 1 расположены четыре равные окружности, каждая из которых касается трех других. Как вычислить радиусы этих окружностей?

Ищем границы

15.16.(2). На сфере данного шара даны две точки. Через них проводятся всевозможные сечения этого шара. Какое из них имеет наибольшую площадь? наименьшую площадь?

15.17.(2). Точки A и B лежат на поверхности шара радиусом 4 с центром в точке O. $|AB|=2$. Каждый из двух отрезков AX и BX имеет с данным шаром единственную общую точку. При этом $|AX|=|BX|=3$. В каких границах лежит $|OX|$?

15.18.(3). На плоскости лежат два шара радиусами R_1 и R_2. Они имеют единственную общую точку. а) На какой высоте над плоскостью находится их общая точка? б) На каком расстоянии между собой находятся точки

касания шаров с плоскостью? в) Чему равен радиус наименьшей сферы, которая касается данных шаров и плоскости, и радиус наибольшей сферы?

15.19.(3). Шар лежит на плоскости α. К нему проведены две опорные плоскости, образующие между собой угол φ, а с α — равные углы. В каких границах лежат эти углы?

15.20.(2). На какое наибольшее число частей могут разделить пространство: а) две сферы; б) три сферы; в) сфера и поверхность куба?

15.21.(3). Шар радиусом R лежит на плоскости. Отрезок длиной d имеет с шаром единственную общую точку. Один его конец лежит на сфере, а другой конец — на плоскости. В каких границах находится расстояние между точкой касания и концом отрезка на плоскости?

15.22.(3). а) Шар радиусом R касается каждой из двух перпендикулярных плоскостей. Чему равен радиус наименьшего шара, касающегося этого шара и данных плоскостей? б) Решите аналогичную задачу в ситуации, когда шар касается трех попарно перпендикулярных плоскостей. в) Можете ли вы без вычислений установить, какой из касающихся шаров из пунктов а) и б) будет больше? г) Составьте аналогичные задачи для случая, когда угол между плоскостями будет отличен от прямого.

Доказываем

15.23.(2). Прямая имеет общую точку с шаром, причем эта точка является внутренней точкой шара. Докажите, что эта прямая со сферой этого шара имеет две общие точки.

15.24.(2). Из точки, взятой вне шара, проводятся все лучи, имеющие с шаром единственную общую точку. Докажите, что: а) отрезки этих лучей от данной точки до шара равны; б) общие точки этих лучей и шара образуют окружность.

15.25.(2). Окружность имеет со сферой три общие точки. Докажите, что она лежит на этой сфере.

15.26.(3). Постройте плоскость, опорную к данному шару и проходящую через: а) данную точку; б) данную прямую.

15.27.(3). Через точку касания шара и плоскости проведены хорды шара одинаковой длины. Докажите, что они образуют с плоскостью одинаковые углы. Верно ли обратное утверждение? (Хорда шара — это отрезок, соединяющий две точки на сфере.)

15.28.(3). Через точку A шара проведена к нему опорная плоскость. На прямой OA (точка O — центр шара) взята точка K, не принадлежащая шару. Из нее проведены лучи, имеющие с шаром единственную общую точку. Докажите, что все они образуют с опорной плоскостью равные углы. Проверьте обратные утверждения.

Исследуем

15.29.(2) У каких четырехугольников все вершины могут лежать на одной сфере? Пусть дан один из таких четырехугольников. Можно ли найти расстояние от центра данной сферы до плоскости, в которой лежит этот четырехугольник? до его сторон?

Ищем границы

19.17. Дан конус радиусом R и образующей L. Через вершину проводится сечение. В каких границах лежит его площадь?

19.18. Из одной точки выходят три равных отрезка, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что существует конус, боковая поверхность которого проходит через эти три отрезка.

Доказываем

19.19. Два конуса имеют ровно одну общую точку — вершину каждого. Докажите, что существует плоскость, которая разделяет эти конусы, т. е. проходит так, что конусы лежат с разных сторон от нее. Обобщите это утверждение.

Исследуем

19.20. В каждом ли конусе существует сечение, параллельное основанию, площадь которого равна площади осевого сечения?

19.21. Угол при вершине осевого сечения конуса равен φ. Угол между двумя образующими на поверхности конуса равен φ_1. Через эти образующие проводятся опорные плоскости к этому конусу. Можете ли вы найти, чему равен угол: а) между этими плоскостями; б) между прямой их пересечения и плоскостью основания конуса?

19.22. Две плоскости перпендикулярны. Конус с углом φ при вершине осевого сечения расположен так, что его вершина лежит на прямой пересечения этих плоскостей, а сами плоскости являются опорными к конусу. При каком угле φ это возможно? Решите эту же задачу в случае, когда данные плоскости не являются перпендикулярными.

Переключаемся

19.23. Вершина конуса недоступна. Как найти его высоту, если можно делать измерения только на его поверхности?

Прикладная геометрия

19.24. Основание конуса находится на земле. Сможете ли вы установить размеры конуса, не подходя к нему?

19.25. В землю воткнута вертикальная палочка. Какую линию описывает на земле тень от ее верхнего конца в течение дня?

19.26. Закрепив вершину, данный конус покатили по плоскости. Какая фигура получится от движения его оси? Какой путь проделает центр основания конуса за один оборот конуса? Может ли конус вернуться в прежнее положение за целое число оборотов?

Участвуем в олимпиаде

19.27. Прямая имеет с боковой поверхностью конуса больше двух общих точек. Докажите, что она проходит через его образующую.

Исследуем

20.12. Даны ограниченное тело и точка вне его. а) Всегда ли существует плоскость, опорная к данному телу и проходящая через данную точку? А если существует, то сколько таких плоскостей? б) Ответьте на те же вопросы для выпуклых тел. в) Вместо точки возьмите прямую, не имеющую с телом общих точек. Ответьте на аналогичные вопросы.

20.13. Пусть дан куб. Некоторая точка удалена от каждой его вершины на расстояние, меньшее длины его ребра. Лежит ли она в кубе? Можно ли, сохраняя ответ однозначным, уменьшить число вершин в условии задачи?

20.14. Дан прямоугольный тетраэдр. Установите по отношению к нему положение точки, равноудаленной: а) от всех его вершин; б) от всех его ребер.

20.15. Дано тело F диаметром d. Точка X удалена от каждой его точки на расстояние, меньшее чем d. Можно ли установить положение точки X относительно F?

20.16. Существует ли ограниченное тело, у которого: а) каждое сечение невыпукло и каждая проекция невыпукла; б) только одно сечение выпукло и только одна проекция выпукла; в) каждая проекция выпукла, а каждое сечение невыпукло; г) каждое сечение выпукло, а каждая проекция невыпукла?

Задачи к главе IV

Представляем

IV.1 Сможете ли вы расположить пять равных цилиндров так, чтобы каждый имел единственную общую точку с каждым из остальных? а шесть таких же цилиндров?

Планируем

IV.2. В данную сферу вписаны: а) цилиндр; б) конус; в) усеченный конус. Размеры этих тел известны. Как найти расстояния от центра сферы до оснований и боковых поверхностей этих тел?

IV.3. Четыре равных шара известного радиуса расположены так, что каждый касается трех остальных. Как найти размеры описанных около этого сооружения: а) шара; б) цилиндра; в) конуса?

IV.4. В конус вписан шар. Размеры конуса известны. Внутри конуса находятся шары. Каждый из них касается основания конуса, его боковой поверхности и вписанного шара. Кроме того, каждые два таких соседних шара касаются между собой. Как подсчитать число таких шаров?

Находим величину

IV.5. Конус с углом φ в осевом сечении закатили в двугранный угол величиной φ_1 так, что его вершина находится на его ребре, а грани двугранного угла лежат в опорных плоскостях к конусу. Какой угол образуют между собой образующие конуса, лежащие в гранях двугранного угла?

IV.6. Основание конуса радиусом 1 и высотой 2 находится на плоскости α. На расстоянии 1 от конуса в этой плоскости укреплен вертикально штатив, на котором на расстоянии 4 от плоскости находится точечный источник света. Вычислите площадь тени, отбрасываемой конусом на плоскость. Можно ли увеличить или уменьшить площадь тени до нужной нам величины, перемещая по плоскости штатив и источник света на нем?

IV.7. Три шара лежат на плоскости, и каждые два из них касаются между собой. Назовем точки касания A, B, C: а) $|AB|=2$, $|AC|=3$, $|BC|=4$; б) $|AB|=4$, $|AC|=5$, $|BC|=6$. В каждом из этих случаев установите, какой из этих шаров наибольший; какой наименьший.

IV.8. Три шара одинакового радиуса лежат на плоскости, и каждые два из них касаются. Четвертый шар того же радиуса кладется в ямку между ними. Какова высота полученного сооружения? (Разумеется, если оно не раскатилось.) Обобщите эту задачу.

IV.9. Два шара радиусом R и два шара радиусом $r (r<R)$ лежат на плоскости. При этом каждый из них касается трех остальных. Вычислите $R:r$.

IV.10. В полушар радиусом R вписаны шары радиусом r так, что каждый из них касается основания полушара и двух других шаров. Сколько шаров находится внутри данного полушара?

IV.11. Уместятся ли: а) три шара радиусом 1 в шаре радиусом 3; б) три шара радиусом 1 в шаре радиусом 2; в) четыре шара радиусом 1 в шаре радиусом 3?

IV.12. Три цилиндра расположены так, что каждые два имеют единственную общую точку. Эта общая точка находится внутри образующей каждого из цилиндров. Оси цилиндров попарно перпендикулярны. Радиус каждого цилиндра равен R. Найдите радиус шара, который пройдет через зазор, образованный цилиндрами.

IV.13. Шар касается плоскости. На этой плоскости находится основание конуса. Шар и конус имеют единственную общую точку внутри образующей конуса. а) Докажите, что вершина конуса, центр шара, точка касания шара и плоскости, общая точка шара и конуса лежат в одной плоскости. б) Пусть размеры шара и конуса известны. Как найти, на каком расстоянии от плоскости находится общая точка шара и конуса.

IV.14. Кулек имеет форму конуса. Его образующая равна диаметру основания и равна 4. Сколько шаров радиусом 1 вы сможете в нем разместить?

IV.15. Конус известных размеров стоит основанием на плоскости. Этой плоскости и боковой поверхности данного конуса касаются шары известного радиуса. Кроме того, каждые два соседних шара касаются между собой. Как подсчитать число таких шаров?

6. На прямой p в пространстве последовательно расположены точки A, B и C, такие, что $AB=27$ и $BC=18$. Найдите расстояние между прямыми p и q, если расстояния от точек A, B и C до прямой q равны 17, 10 и 8 соответственно.

Ответ: 8.

7. Три хорды шара, исходящие из одной его точки на его поверхности, равны a, углы между хордами равны 60°.

Ответ: $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

8. Сфера касается ребер AS, BS, BC и AC тетраэдра $SABC$ в точках K, L, M и N соответственно. Найдите длину отрезка KL, если $MN=7$, $NK=5$, $LN=2\sqrt{29}$ и $KL=LM$.

Ответ: 9.

9. Две касающиеся сферы вписаны в двугранный угол величиной $\frac{\pi}{3}$. Пусть A — точка касания первой сферы с первой гранью, B — точка касания второй сферы со второй гранью. Найдите отношение $AK:KL$, если K и L — точки пересечения отрезка AB с первой и второй сферами соответственно.

Ответ: 3:1.

10. Два равных шара касаются друг друга и граней двугранного угла 2α. Пусть A — точка касания одного шара с одной гранью угла, а B — точка касания другого шара с другой гранью угла. В каком отношении отрезок AB делится сферами?

Ответ: $1:\mathrm{tg}^2\alpha:1$.

11. Каждый из двугранных углов трехгранного угла равен α. Как удалена от его вершины точка, которая находится внутри угла на расстоянии a от каждого угла?

Ответ: $\left(a\sqrt{3}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right):\left(\sqrt{3}\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)$.

12. В цилиндре высота равна диаметру основания. Под углом α к плоскости основания проведена прямая, соединяющая некоторую точку окружности нижнего основания с некоторой точкой окружности верхнего основания. Найдите расстояние между этой прямой и осью цилиндра, если радиус основания равен R.

Ответ: $\sqrt{\frac{-\cos 2\alpha}{\sin\alpha}}\,R$.

13. Внутри цилиндра, высота которого равна $3r$, лежат три равных шара радиуса r так, что каждый шар касается двух других шаров и боковой поверх-

ности цилиндра, причем два шара касаются нижнего основания цилиндра, а третий шар касается верхнего основания цилиндра. Найдите радиус основания цилиндра.

Ответ: $\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\ r$.

14. На плоскость положены два цилиндра, радиусы которых r; цилиндры примыкают друг к другу по образующей. На них положены два других касающихся по образующей цилиндра с радиусами R и осями, перпендикулярными осям первых двух цилиндров. Найдите радиус шара, касающегося всех четырех цилиндров.

Ответ: $\frac{(R+r)^2}{2(R+r+\sqrt{R^2+6Rr+r^2})}$.

15. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 4. Прямые AB_1 и CA_1 перпендикулярны. Найдите высоту призмы.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

16. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами α и β. Найдите угол между этими диагоналями.

Ответ: $\arccos(\sin\alpha\cdot\sin\beta)$.

17. Основанием $ABCD$ прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб со стороной a и острым углом φ, а высота призмы равна h. Найдите расстояние от вершины B_1 до диагонали A_1D.

Ответ: $\frac{a\sqrt{h^2+a^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{h^2+a^2}}$.

18. В прямом круговом конусе с вершиной S угол между образующими SA и SB равен α, а угол между их проекциями на плоскость основания равен β. Вычислите угол между биссектрисами углов OSA и OSB, где точка O — центр основания конуса.

Ответ: $\arccos\left(\cos^2\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{2}}\right)$.

19. Угол между образующей конуса и его высотой равен α. Найдите угол φ между двумя образующими этого конуса, если известно, что плоскости, касающиеся конуса по этим образующим, взаимно перпендикулярны.

Ответ: $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}$.