Планируем

7.11.(1). Пусть отрезок PA — перпендикуляр к плоскости α, $A \in \alpha$. В плоскости α лежит отрезок BC, причем $|AB| = |AC|$. Пусть известны $|PA|$, $|BC|$ и угол, под которым отрезок BC виден из точки A, т. е. $\angle BAC$. Как вычислить угол, под которым он виден из точки P, т. е. $\angle BPC$? Для этой же ситуации составьте задачи, обратные данной. Рассмотрите также разные обобщения в этой задаче, а затем составьте задачи, обратные им.

7.12.(1). Пусть отрезок PO — перпендикуляр к плоскости α, $O \in \alpha$. Пусть PA, PB, PC — разные наклонные к этой плоскости, образующие между собой равные углы. Как вычислить угол между этими наклонными, если известны длина перпендикуляра к плоскости и длины наклонных? Для этой же ситуации составьте задачи, обратные данной. Рассмотрите разные обобщения в этой задаче, а затем составьте задачи, обратные им.

7.13.(3). Как проверить перпендикулярность прямой и плоскости, измеряя только расстояния?

7.14.(5). К плоскости α провели два перпендикуляра AB и CD. $B \in \alpha$, $D \in \alpha$. Пусть $|AB|$, $|CD|$, $|BD|$ известны. Как вычислить $|AC|$? Составьте задачи, обратные данной.

7.15.(6). а) Пусть в треугольной пирамиде все боковые ребра равны. Как вычислить высоту пирамиды, если известна длина бокового ребра и каждого ребра основания? б) Пусть в правильной n-угольной пирамиде известны боковое ребро и ребро основания. Как вычислить высоту пирамиды?

7.16.(6). Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, точка Q — центр его основания, точка K — середина ребра PA. Нарисуйте перпендикуляры: а) из K на (ABC); б) из K на (BCP); в) из Q на (APC); г) из Q на (BKC). Как найти длину каждого из них, если ребро тетраэдра известно?

7.17.(6). В четырехугольной пирамиде $PABCD$ с равными ребрами точка Q — центр основания, точка K — середина ребра AB. Нарисуйте перпендикуляры: а) из A на (BPD); б) из K на (APC); в) из K на (CPD); г) из Q на (APB); д) из D на (BCP); е) из K на (APD); ж) из C на (APD).
Как найти длину каждого из них, если ребро пирамиды известно?

7.18.(6). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точка K — середина BB_1, точка L — середина CC_1, точка M — середина A_1B_1, точка $N \in (BC)$ и точка C — середина отрезка BN. Нарисуйте перпендикуляры: а) из A на (BB_1D_1); б) из A_1 на (AB_1D_1); в) из D_1 на (AB_1C); г) из K на (CDD_1); д) из L на (BDB_1); е) из M на (AB_1D_1); ж) из N на (BDB_1); з) из N на (DA_1B_1); и) из D_1 на (A_1C_1B).
Как вычислить длину каждого из них, если ребро куба известно?

Находим величину

7.19.(6). Нарисуйте высоту тетраэдра $PABC$, если: а) все ребра, кроме PB, имеют длину 2, а длина ребра PB равна 1. Как изменится рисунок, если длина PB будет равна $\sqrt{6}$; 3; 10? б) $|PA| = |PB| = |PC| = 2$,

$|AC|=3$, $|AB|=2$, $|BC|=2$. Как изменится рисунок, если $|BC|=3$; 4? в) $|PA|=|PC|=2$, $|BA|=|BC|=1$, $|PB|=|AC|$.

В каждом из случаев вычислите высоту пирамиды. Всегда ли достаточно для этого данных?

7.20.(6). Нарисуйте высоту четырехугольной пирамиды $PABCD$, если: а) все ее боковые ребра равны 2, в основании ее лежит равнобедренная трапеция, у которой боковая сторона, равная 1, образует с основанием, равным 2, угол 60°; б) ее основанием является квадрат со стороной 2, $|PC|=|PD|=2$, $|PA|=|PB|=3$.

В каждом из случаев вычислите высоту пирамиды.

√ **7.21.(6).** Диагональ B_1D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — перпендикуляр к плоскости α, $D\in\alpha$. Нарисуйте перпендикуляры к плоскости α из точек B, D_1, A_1, A. Вычислите длину каждого из них, если ребро куба известно.

Ищем границы

7.22.(5). В плоскости α лежит треугольник ABC. Из точек B и C с одинаковой скоростью стали одновременно двигаться точки X и Y по прямым, перпендикулярным плоскости α. В какой момент времени отрезок XY виден из точки A под наибольшим углом? под наименьшим углом? Решите задачу в двух случаях: а) точки движутся в одном направлении; б) точки движутся в разных направлениях.

Доказываем

7.23.(1). Пусть AB — перпендикуляр на плоскость α, $B\in\alpha$, AC и AD — наклонные к этой плоскости. Докажите, что: а) $|AC|=|AD|$ тогда и только тогда, когда $|BC|=|BD|$; б) $|AC|>|AD|$ тогда и только тогда, когда $|BC|>|BD|$.

7.24.(1). В правильном треугольнике ABC точка O — его центр. Пусть OP — прямая, перпендикулярная плоскости ABC, и пусть точка X лежит на этой прямой, не совпадая с точкой O. Докажите, что: а) расстояния от X до вершин треугольника равны; б) расстояния от X до сторон треугольника равны; в) $\angle AXO=\angle BXO=\angle CXO$; г) $\angle XAO=\angle XBO=\angle XCO$. Обобщите задачу.

7.25.(3). Пусть $A\in\alpha$ и прямая AB перпендикулярна двум прямым AC и AD плоскости α. Проведите прямую AK в плоскости α и возьмите на ней любую точку $X\neq A$. Через точку X проведите отрезок, который заключен между прямыми AC и AD и точкой X делится пополам. Соедините точку B с концами этого отрезка и с точкой X. Исходя из этого построения докажите, что $(AB)\perp\alpha$.

7.26.(3). Пусть $A\in\alpha$ и прямая AB перпендикулярна двум прямым AC и AD плоскости α. Продолжите отрезок AB за точку A на расстояние, равное $|AB|$. Полученный отрезок обозначьте AB_1. Через точку A в плоскости α проведите любую прямую AK, отличную от AC и AD. Проведите прямую, пересекающую прямые AC, AD, AK. Соедините точки B и B_1 с точками пересечения этих прямых. Исходя из этого построения докажите, что $(AB)\perp\alpha$.