

Общеобразовательная школа №1189 им. И.В. Курчатова

# Термо- динамика

Составитель: Бойченко А.М.  
Пособие по физике, 10 класс  
термодинамика, ч. 2  
1-е и 2-е начала

Москва 2007

**Оглавление**

Предисловие.....	3
2.1 Первое начало термодинамики.....	4
Теплота.....	4
Теплообмен.....	4
Количество теплоты.....	4
Уравнение теплового баланса.....	5
Внутренняя энергия.....	5
Число степеней свободы атомов и молекул газа.....	6
Работа в термодинамике.....	7
Первое начало термодинамики.....	9
Теплоемкость при постоянном объеме.....	10
Теплоемкость при постоянном давлении.....	10
Адиабатический процесс.....	10
Уравнение Пуассона (адиабаты).....	10
2.2 Второе начало термодинамики.....	11
Тепловая машина.....	11
К.п.д. тепловой машины.....	12
Холодильная машина.....	12
Холодильный коэффициент.....	12
Простейшие понятия об энтропии.....	12
Свойства энтропии. Второе и третье начала термодинамики .....	13
Энтропия идеального одноатомного газа.....	13
Число перестановок из $N$ частиц.....	14
Расчет $S_{пр}$ .....	14
Расчет $S_{ск}$ .....	15
Связь изменения энтропии системы с переданным количеством теплоты...	16
Обратимые, необратимые процессы.....	16
Идеальная тепловая машина.....	17
Цикл Карно.....	17
К.п.д. идеальной тепловой машины.....	17
К.п.д. неидеальной тепловой машины.....	18
Формулировки Клаузиуса и Кельвина второго начала термодинамики.	18
Вечные двигатели первого и второго рода.....	19
Приложение. Вывод уравнения адиабаты.....	21
Примеры решения задач .....	22

## Предисловие

Обычно из материала, связанного со вторым началом термодинамики, в школьных учебниках дается понятие о тепловых машинах и приводятся формулы для к.п.д. обычной (2.16) и идеальной (2.34) тепловой машин. Этого вполне достаточно даже для решения школьных задач повышенной трудности.

В данном пособии материал, касающийся второго начала термодинамики, расширен. Сделано это по следующей причине. Часто на уроках, после приведения без вывода формулы для к.п.д. идеальной тепловой машины, у многих учеников возникают различные вопросы, связанные, например, с конкретным видом формулы (2.34) или с соотношением между к.п.д. обычной и идеальной тепловых машин (2.35). Уже упоминание о том, что существует некоторая функция состояния (энтропия), подчиняющаяся соотношениям (2.31), (2.32) с последующим выводом соотношений (2.34) и (2.35) несколько улучшает ситуацию. Но всегда есть ученики, которым все равно хочется знать еще больше. Приведенное изложение второго начала предназначено для них. Оно, возможно, потребует больших усилий для понимания, но как раз таких учеников это не остановит. Это все-таки лучше, чем просто им сказать, что в институте вас научат, если вы будете и дальше учиться после окончания школы. Кроме того, есть ученики, которые неуютно себя чувствуют, если что-то перестают понимать или что-то остается без объяснения. По этой же причине приводится вывод уравнения адиабаты. К концу 10 класса математическая подготовка, проводимая в физико-математических классах школы №1189 им. И.В. Курчатова, позволяет уже полностью осваивать приведенный материал.

Для вполне успешной учебы из первой главы приведенного материала можно опустить вывод уравнения адиабаты, а из второй главы можно опустить часть изложения, связанную с энтропией.

## 2.1 Первое начало термодинамики

**Теплота.** Одной из важных сохраняющихся величин в замкнутых макроскопических механических системах с консервативными (см. пособие по механике) силами является механическая энергия системы. Если в системе имеются неконсервативные силы (силы трения), то в такой системе механическая энергия уменьшается. Однако, если разбить механическую систему на более мелкие составляющие – на атомы и молекулы, то такая более детализированная система снова становится консервативной. В такой системе, следовательно, энергия должна сохраняться. Только теперь это энергия атомов и молекул системы. Таким образом, уменьшающаяся механическая энергия макроскопической системы приводит к увеличению энергии хаотического движения атомов и молекул, которая и называется *теплотой*.

**Теплообмен.** В неравновесных (имеется в виду тепловое равновесие) системах между различными ее подсистемами самопроизвольно и необратимо протекают процессы переноса теплоты, называемые *теплообменом*. В п. 1.3 части 1 пособия отмечалось, что температура – это своеобразная мера интенсивности движения атомов и молекул, т.е. процессы теплообмена обусловлены неоднородностью температуры системы. Различают следующие виды теплообмена: теплопроводность, конвекция, лучистый теплообмен, теплообмен при фазовых превращениях.

Если перенос теплоты осуществляется непосредственно при передаче энергии от частиц (например, атомов и молекул) системы с большей энергией частицам с меньшей энергией, то такой перенос теплоты называется *теплопроводностью*. Перенос теплоты потоками вещества (например, жидкости или газа) называется *конвекцией*, если перенос обусловлен процессами испускания, распространения, рассеяния и поглощения электромагнитного излучения, то такой процесс переноса теплоты называется *лучистым теплообменом* (*лучистым переносом*, *радиационным теплообменом*).

**Количество теплоты.** Количественной мерой теплоты, т.е. количества энергии, получаемой или отдаваемой системой при теплообмене, служит *количество теплоты*. Отношение количества теплоты  $Q$ , поглощаемой системой при бесконечно малом изменении его температуры  $\Delta T$ , к этому изменению температуры, выраженное в градусах ( $^{\circ}\text{C}$  или  $\text{K}$ ), называется ее *теплоемкостью*  $C$

$$Q = C\Delta T \quad (2.1)$$

Количество теплоты, поглощаемое системой, зависит от начального, конечного состояний системы и от способа его передачи. Конечно же, теплоемкость зависит также и от количества вещества, содержащегося в системе, поэтому наиболее удобной характеристикой являются *удельная теплоемкость*

$$c_m = C/m \quad (2.2)$$

$$C_v = C/\nu \quad (2.3)$$

где  $m$ ,  $\nu$  – соответственно масса либо количество вещества рассматриваемой системы или подсистемы.

**Уравнение теплового баланса.** Пусть у нас есть две подсистемы (например, два тела), которые могут обмениваться теплотой только друг с другом. При теплообмене между двумя такими телами количество теплоты, отдаваемое более нагретым телом равно количеству теплоты, получаемому менее нагретым телом. Пусть, например, для охлаждения куска металла с температурой  $t_2$  и массой  $m_2$ , его опускают в жидкость с температурой  $t_1$  и массой  $m_1$ . Какая установится при этом температура, если результирующая система теплоизолирована? Количество теплоты, отдаваемое металлом, равно количеству теплоты, получаемому жидкостью. Если в процессе установления температуры не происходит фазового перехода (см. часть 3 пособия), то результирующая температура  $t$  находится из условия

$$c_m m_1 (t_1 - t) = c_j m_2 (t - t_2)$$

где  $c_m$ ,  $c_j$  – соответственно удельные теплоемкости металла и жидкости (см. (2.2), (2.1)). Данное соотношение можно переписать в виде

$$c_m m_1 \Delta t_1 + c_j m_2 \Delta t_2 = Q_1 + Q_2 = 0$$

где  $\Delta t_1$ ,  $\Delta t_2$  – абсолютные изменения температур жидкости и металла, и называется *уравнением теплового баланса*. В выписанном равенстве согласно определению абсолютного изменения  $\Delta t_1 = t - t_1 > 0$ , а  $\Delta t_2 = t - t_2 < 0$ , соответственно,  $Q_1 > 0$ ,  $Q_2 < 0$ . Если теплообмен происходит между несколькими системами, то данное соотношение легко обобщается и имеет вид

$$\sum_i Q_i = 0 \quad (2.4)$$

где суммирование ведется по всем участвующим в теплообмене системам.

Наряду с количеством теплоты в термодинамике важную роль играют также внутренняя энергия системы и работа. Перейдем теперь к рассмотрению этих понятий.

**Внутренняя энергия.** При определении теплоты мы видели, что механическая энергия системы (или тела) не исчерпывает всей ее энергии. Разница энергии системы (или тела) и ее механической энергии (т.е. кинетической энергии системы как целого и ее потенциальной энергии во внешнем поле сил) называется *внутренней энергией* системы. Таким образом, внутреннюю энергию составляют кинетическая энергия атомов или молекул, потенциальная энергия их взаимодействия и (для молекулярных систем) внутримолекулярная энергия. Отметим, что в термодинамике необходимо знать не саму внутреннюю энергию системы, а ее изменение при изменении состояния системы. Поэтому учитывают только те составляющие внутренней энергии, которые меняются при изменении состояния системы.

Каждый атом или молекула характеризуется числом степеней свободы. Каждая степень свободы ассоциируется с некоторой частью энергии атома или

молекулы. Оказывается, что никакая из степеней свободы в этом смысле не выделена перед другими. Данное утверждение носит название *закона равнораспределения*. Согласно этому закону на каждую степень свободы в равновесии в среднем приходится одинаковая кинетическая энергия, равная  $(1/2)kT$ , где  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура в градусах Кельвина.

**Число степеней свободы атомов и молекул газа.** Положение тела или объекта в пространстве можно охарактеризовать определенным числом параметров. Наименьшее число, необходимое для этого называется *числом степеней свободы* данного объекта. Для описания положения недеформируемого, объемного тела достаточно задания шести параметров, т.е. его число степеней равно шести. Три из них задают пространственные координаты центра тяжести тела и характеризуют возможность его перемещения в пространстве и еще три – характеризуют возможность вращения тела относительно трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через центр тяжести. В соответствии с этим первые три степени свободы называются *поступательными*, а вторые – *вращательными*. Для осесимметричных тел число степеней свободы уменьшается до пяти. Это обстоятельство отражает тот факт, что при вращении такого тела относительно оси симметрии, оно не меняет своего пространственного положения. Сферически симметричное тело характеризуется тремя степенями свободы – вращение вокруг любой оси, проходящей через центр симметрии, не меняет пространственного положения тела.

Аналогичное рассмотрение приводит к тому, что для системы точек в общем положении, относительное положение которых фиксировано, число степеней свободы равно шести. Если при этом точки лежат на одной оси, то число степеней свободы уменьшается до пяти. Число степеней свободы точки равно трем – достаточно указать ее координаты, чтобы полностью описать ее положение в пространстве.

В газах обычно среднее расстояние между атомами или молекулами намного превышает размеры самих атомов и молекул, поэтому при вычислении внутренней энергии газов можно пренебречь вкладом в нее потенциальной энергии взаимодействия атомов для атомарных газов и потенциальной энергии взаимодействия молекул для молекулярных газов. Если химический состав газа не меняется, то во внутренней энергии достаточно учитывать только вклад хаотического движения частиц. Поэтому согласно закону равнораспределения и соотношению (1.10) внутреннюю энергию газа можно представить в виде

$$U = \frac{i}{2} kTN = \frac{i}{2} \nu RT \quad (2.5)$$

где

$$i = \begin{cases} 3 & \text{– для атомарных газов} \\ 5 & \text{– для молекулярных газов, атомы в молекулах} \\ & \text{которых располагаются на одной линии, в} \\ & \text{частности, для газов с двухатомными молекулами} \\ 6 & \text{– для остальных газов} \end{cases} \quad (2.6)$$

– число степеней свободы атомов или молекул газа,  $k$  – постоянная Больцмана,  $\nu$  – число молей рассматриваемого газа. Так, например, при выводе соотношения (1.29) использовались только поступательные степени свободы атомов и молекул (использовались скорости центров инерции), соответственно, коэффициент в этом соотношении равен  $3/2$ .

**Примечание (о больших температурах).** Молекулу можно считать системой атомов, относительное положение которых фиксировано только при сравнительно невысоких температурах, не превышающих по порядку величины несколько тысяч градусов Кельвина. Именно такие температуры обычно фигурируют в школьных задачах. Выражение (2.6) справедливо именно для этих температур. При более высоких температурах молекулу уже нельзя считать системой с фиксированным относительным положением атомов. Атомы в молекулах начинают колебаться относительно своих положений равновесия. В этом случае  $Z$  атомов имеют  $3Z$  степеней свободы. Дополнительные степени свободы по сравнению с (2.6), т.е.  $3Z - 5$  либо  $3Z - 6$  называются *колебательными степенями свободы*. При гармонических колебаниях (см. пособие по механике – колебания) среднее значение кинетической и потенциальной энергий совпадает, соответственно, для внутренней энергии вклад каждой из колебательных степеней свободы удваивается

$$U = \frac{i'}{2} kTN = \frac{i'}{2} \nu RT$$

где

$$i' = i + 2(3Z - i)$$

**Работа в термодинамике.** Рассмотрим газ в цилиндрическом сосуде с плотно подогнанным к нему поршнем (рис. 2.1). Зафиксируем поршень в начальном положении 1. Пусть под давлением газа поршень переместится в положение 2. Какую работу при этом совершит газ? В механике работа, затрачиваемая на перемещение тела под воздействием силы  $\vec{F}$  при перемещении его на малую величину  $\Delta \vec{s}$ , равна

$$A = \vec{F} \Delta \vec{s}$$

В нашем случае поршень может двигаться только в одном направлении вдоль оси  $x$ . Если давление газа равно  $p$ , то по определению сила, с которой газ действует на поршень, равна

$$F = pS$$

где  $S$  – площадь поршня. Причем направлена она перпендикулярно поверхности, т.е. она действует также в направлении вдоль оси  $x$ .

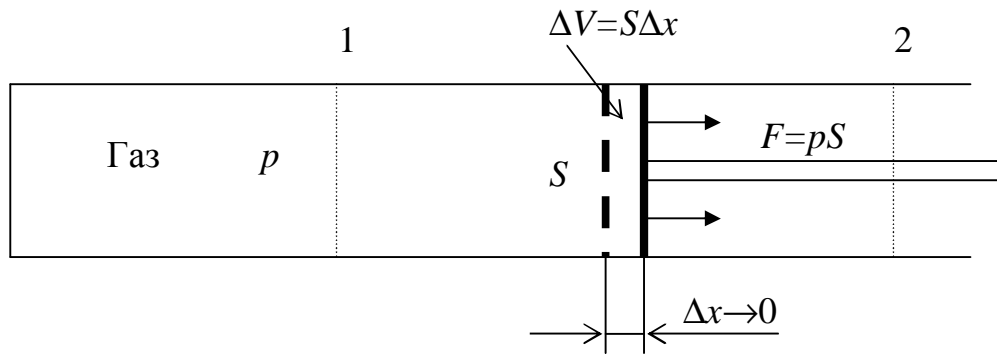


рис. 2.1

Следовательно, работа, совершаемая над поршнем под действием этой силы, при его перемещении на малую величину  $\Delta x$ , равна

$$A = F\Delta x = pS\Delta x = p\Delta V \quad (2.7)$$

где  $\Delta V$  – изменение объема газа, вызванное перемещением поршня. Данная формула справедлива только при изменении объема на малую величину  $\Delta V$ , поскольку в общем случае давление газа не постоянно при изменении объема на произвольную конечную величину. В последнем случае для расчета работы нужно просуммировать слагаемые, соответствующие изменениям объема на малые величины  $\Delta V_i$

$$A = \sum_{i=1}^N p_i \Delta V_i \quad (2.8)$$

таким, что полное изменение объема равно сумме его  $N$  малых изменений

$$\Delta V = \sum_{i=1}^N \Delta V_i$$

при этом  $p_i$  – это давление газа, при котором происходит изменение объема на малую величину  $\Delta V_i$ . Соотношение (2.8) тем точнее, чем меньше  $\Delta V_i$  (чем больше  $N$ ). В пределе, когда стремятся  $\Delta V_i$  к нулю, получаем точное соотношение, которое обозначается как

$$A = \int_{V^1}^{V^2} p dV \quad (2.9)$$

(читается как интеграл от  $p$  по  $dV$  в пределах от  $V^1$  до  $V^2$ ). Чему соответствует сумма (2.8) на  $p$ - $V$  диаграмме, соответствующей расширению газа при передвижении поршня (рис. 2.2)? Она соответствует сумме площадей прямоугольников с шириной  $\Delta V_i$  и высотой  $p_i$ . В пределе, когда все  $\Delta V_i$  стремятся к нулю, эта сумма представляет собой площадь под кривой процесса на  $p$ - $V$  диаграмме. Таким образом, *работа*, совершаемая системой в *термодинамике* при изменении ее объема от  $V^1$  до  $V^2$ , есть площадь под кривой



на  $p$ - $V$  диаграмме, соответствующей процессу, для которого вычисляется работа.

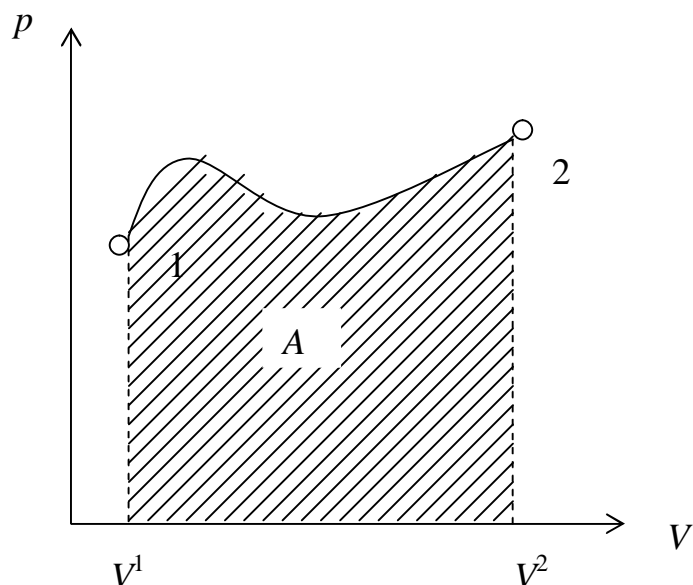
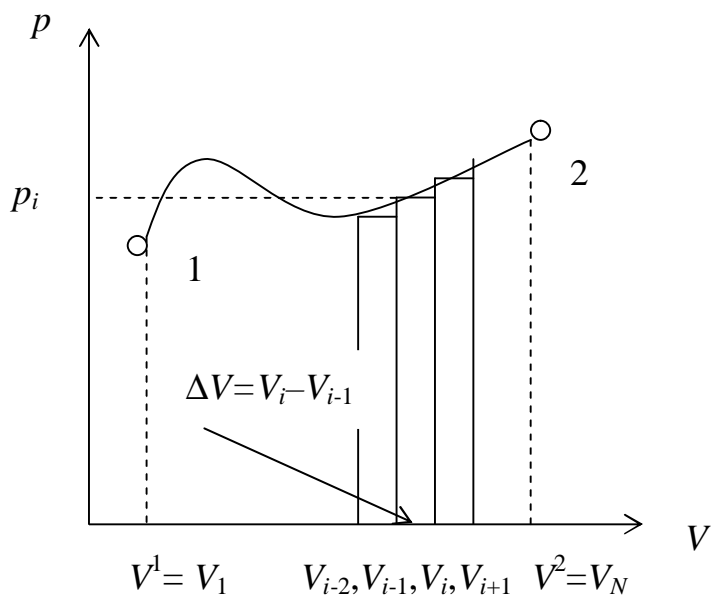


рис. 2.2

**Первое начало термодинамики** сформулировано в работах Ю.Р. Майера и Г. Гельмгольца в середине XIX века и представляет собой закон сохранения энергии для систем, в которых существенное значение имеют тепловые процессы. Согласно *первому началу термодинамики* количество теплоты  $Q$ , переданное системе, идет на совершение системой работы  $A$  над внешним окружением и на изменение внутренней энергии системы  $\Delta U$

$$Q = A + \Delta U \quad (2.10)$$

Другая распространенная эквивалентная формулировка этого начала: количество теплоты, переданное системе, и работа  $A'$  ( $A = -A'$ ), совершаемая над системой, идут на изменение внутренней энергии системы

$$A' + Q = \Delta U \quad (2.11)$$

**Теплоемкость при постоянном объеме.** Если в каком-то процессе объем системы не меняется, то совершаемая работа равна нулю. Тогда согласно первому началу термодинамики (2.10), выражению для внутренней энергии (2.5) и определению молярной теплоемкости (2.3), (2.1) получаем для нее выражение

$$\nu C_V = Q/\Delta T = \Delta U/T = i\nu R/2 \quad (2.12)$$

т.е.

$$C_V = \frac{i}{2} R \quad (2.13)$$

Значок  $V$  у теплоемкости ( $C_V$ ) означает, что идет речь о теплоемкости при постоянном объеме.

**Теплоемкость при постоянном давлении.** Рассмотрим передачу теплоты при постоянном давлении, т.е. при условии  $p = const$ . Тогда согласно первому началу термодинамики (2.10) и определению молярной теплоемкости (2.3), (2.1) получаем

$$\Delta Q = \nu C_p \Delta T = \Delta U + A = \nu C_V \Delta T + p \Delta V = \nu(C_V + R) \Delta T \quad (2.14)$$

где согласно уравнению Менделеева-Клайперона (1.11) учтено, что  $p \Delta V = \nu R \Delta T$ . Значок  $p$  у теплоемкости ( $C_p$ ) означает, что идет речь о теплоемкости при постоянном давлении. Данное равенство справедливо для произвольных  $\Delta T$ . Таким образом, окончательно получаем связь молярной теплоемкости при постоянном давлении  $C_p$  с молярной теплоемкостью при постоянном объеме  $C_V$

$$C_p = C_V + R \quad (2.15)$$

**Адиабатический процесс.** Если в каком-то процессе не происходит передачи теплоты системе, то такой процесс называется *адиабатическим* (*адиабатным*).

**Уравнение Пуассона (адиабаты).** Обозначим через  $dX$  бесконечно малое изменение физической величины  $\Delta X$ . Тогда для адиабатического процесса соотношение (2.14) будет выглядеть следующим образом

$$0 = dQ = \nu C_V dT + p dV$$

согласно уравнению Менделеева-Клайперона (1.11) данное соотношение можно переписать в виде

$$0 = \nu C_V dT + p dV = \nu(C_V dT + RT dV/V)$$

или

$$C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = 0$$

переходя из точки  $T_1, V_1$  в точку  $T_2, V_2$ , т.е. интегрируя данное выражение (см. подробнее приложение) получаем *уравнение адиабаты*

$$TV^{R/C_V} = TV^{\gamma-1} = const$$

Смысл этой записи такой же, как и смысл записей (1.1), (1.5), (1.12). Переходя с помощью уравнения Менделеева-Клайперона (1.11) от переменной  $T$  к переменным  $p$  и  $V$ , получаем

$$pV^{R/C_v+1} = pV^\gamma = const$$

или же от переменной  $V$  к переменным  $p$  и  $T$ , получаем

$$T^\gamma / p = const$$

где постоянная

$$\gamma = \frac{R}{C_v} + 1 = \frac{C_p}{C_v}$$

называется *постоянной адиабаты*. В последнем равенстве использовалось соотношение (2.15).

## 2.2 Второе начало термодинамики

**Тепловая машина.** Первое начало термодинамики дает нам связь между количеством теплоты, переданной системе, изменением ее внутренней энергии и работой системы при произвольных процессах. Рассмотрим теперь циклические процессы (пример такого процесса на  $p$ - $V$  диаграмме приведен на рис. 2.3).

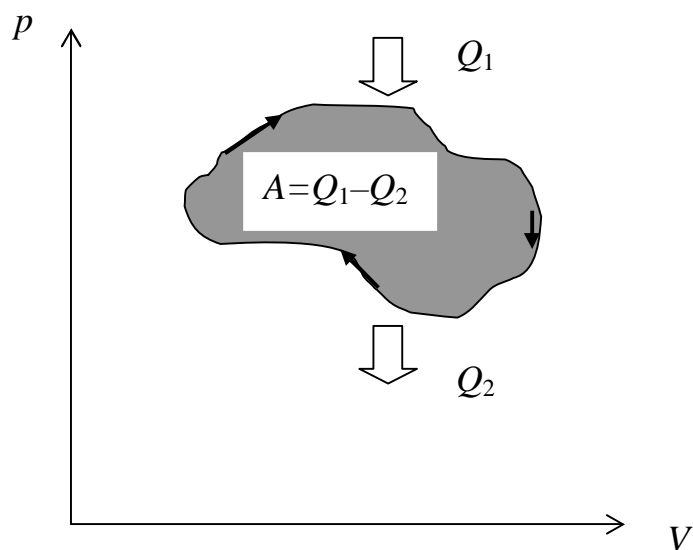


рис. 2.3

В этом случае изменение внутренней энергии равно тождественно нулю, поскольку внутренняя энергия является функцией состояния, а за цикл система возвращается в свое исходное состояние. В ходе циклического процесса система получает на некоторых участках цикла какое-то количество теплоты  $Q_1$  извне (при этом говорят, что она получает это количество теплоты от *нагревателя*), на некоторых других участках цикла она, наоборот, отдает какое-то количество теплоты  $Q_2$  вовне (при этом говорят, что она отдает это

количество теплоты *холодильнику*). В соответствии с первым началом термодинамики получаем, что за цикл

$$Q_1 - Q_2 = A$$

где  $A$  – работа системы за цикл (см. рис. 2.3). Таким образом, в циклических термодинамических процессах возможно совершение работы, которая может использоваться, например, для каких-нибудь практических целей. Устройства, работающие на циклических термодинамических процессах, называются *тепловыми машинами*. Отметим, что первые буржуазные революции связаны с широким внедрением тепловых машин для технических и практических нужд человечества.

**Коэффициент полезного действия (к.п.д.) тепловой машины**

определяется как отношение работы за цикл к полученному количеству теплоты извне

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad (2.16)$$

Видно, что к.п.д. тепловой машины не может превышать единицу.

**Холодильная машина.** Если цикл на рис. 2.3 обратить, т.е. изменить направление обхода исходного цикла тепловой машины, то система будет забирать количество теплоты  $Q_2$  из резервуара с менее высокой температурой, над системой будет совершаться работа  $A'$ , после чего количество теплоты  $Q_1$  будет выводиться в резервуар с более высокой температурой. Это будет приводить к охлаждению первого из упомянутых резервуаров, мы получаем цикл *холодильной машины*.

Холодильная машина может использоваться как *тепловой насос*. В нем нагревателем используется отапливаемое помещение, а холодильником – наружная атмосфера. При работе теплового насоса отапливаемое помещение получает большее количество теплоты, чем совершаемая работа  $A'$

$$Q_1 = Q_2 + A'$$

т.е. нагрев помещения происходит более эффективно по сравнению со случаем, когда эта же работа непосредственно переводится во внутреннюю энергию (например, при преобразовании электрической энергии в электропечах, электроплитках и т.д.).

**Холодильный коэффициент.** Холодильную машину можно характеризовать к.п.д. тепловой машины, цикл которой обращается. Но кроме этого, холодильная машина также характеризуется *холодильным коэффициентом*

$$k = \frac{Q_2}{A'} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

В отличие от к.п.д. тепловой машины, холодильный коэффициент может превышать единицу.

**Простейшие понятия об энтропии.** В 1 части пособия отмечалось, что состояние термодинамической системы характеризуется термодинамическими

параметрами – объемом, давлением, температурой и т.д., т.е. состояние огромного числа атомов и молекул в целом характеризуется небольшим числом величин, называемых также *макроскопическими величинами*. Соответственно, состояние, характеризуемое этими величинами, называется *макроскопическим (макросостоянием)*. Макроскопическое состояние системы характеризуется его *статистическим весом (статвесом)*  $\Omega$  – т.е. числом (микроскопических) способов, которыми может быть осуществлено данное макросостояние. *Энтропией* системы называется величина

$$S = k \ln \Omega \quad (2.17)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана.

**Свойства энтропии. Второе и третье начала термодинамики.** Из приведенного определения (2.17) можно сразу сделать несколько выводов.

1. При протекании необратимых процессов в системе число доступных состояний для нее увеличивается, т.е. увеличивается ее статистический вес, следовательно, при протекании необратимых процессов энтропия системы возрастает, т.е.

$$\Delta S > 0$$

В общем случае энтропия изолированной системы не может убывать

$$\Delta S \geq 0 \quad (2.18)$$

Последнее утверждение называется *законом возрастания энтропии* или *вторым началом термодинамики*.

Предоставленная сама себе система переходит в равновесное состояние. В процессе перехода согласно свойству 1, энтропия может только возрастать, следовательно,

2. В равновесном состоянии энтропия системы максимальна.

3. (Свойство *аддитивности* энтропии). Если система состоит из нескольких подсистем, причем статвес каждой из подсистем не зависит от статвесов других подсистем, т.е.  $\Omega = \Omega_1 \Omega_2 \dots \Omega_n$ , то энтропия системы равна сумме энтропий подсистем, т.е.

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$$

При стремлении температуры к абсолютному нулю, система, как правило, переходит в основное состояние, статистический вес которого равен единице. Согласно (2.17) энтропия такого состояния равна нулю. Таким образом, энтропия системы стремится к нулю при стремлении к нулю ее температуры. Данное утверждение называется *теоремой Нернста* или *третьим началом термодинамики*.

**Энтропия идеального одноатомного газа.** Макроскопическое состояние идеального газа определено при наличии двух термодинамических параметров – например,  $V$  и  $T$ . Его статистический вес можно определить, зная координаты и скорости атомов газа. Распределение координат и скоростей атомов является независимым друг от друга (если атом в какой-то точке пространства имеет определенную скорость, то это никак не сказывается на скорости атомов в другой точке пространства), поэтому статистический вес можно представить в

виде произведения  $\Omega_{\text{пр}}$  – числа различных способов размещения атомов в пространстве и  $\Omega_{\text{ск}}$  – числа различных способов размещения атомов по скоростям.

$$\Omega = \Omega_{\text{пр}}\Omega_{\text{ск}} \quad (2.19)$$

**Число перестановок из  $N$  частиц.** Для расчета статистических весов сделаем небольшое отступление. Сколько существует различных перестановок  $N$  чисел? Сколько существует различных способов распределения  $N$  шариков по  $N$  ящикам? Это число легко подсчитать. В первый ящик мы можем положить любой из  $N$  шариков, т.е. существует  $N$  различных способов заполнения 1-ого ящика. У нас осталось  $N-1$  ящиков и  $N-1$  шариков. Во второй ящик мы можем положить теперь любой из оставшихся  $N-1$  шариков. Т.о. число различных заполнений 2-х первых ящиков равно  $N(N-1)$ . Продолжая этот процесс далее, получим что искомое число (для его обозначения существует специальный символ  $N!$  – читается  $N$  факториал) равно

$$N! = N(N-1)(N-2)\dots 1 \quad (2.20)$$

Перейдем теперь к вычислению энтропии.

Согласно (2.17), (2.19) имеем

$$S = k \ln \Omega = k \ln(\Omega_{\text{пр}}\Omega_{\text{ск}}) = k \ln(\Omega_{\text{пр}}) + k \ln(\Omega_{\text{ск}}) = S_{\text{пр}} + S_{\text{ск}} \quad (2.21)$$

**Расчет  $S_{\text{пр}}$ .** Чем можно охарактеризовать пространственное макросостояние и число способов  $\Omega_{\text{пр}}$  его реализации? Разобьем, например, объем, занимаемый газом на большое число пространственных ячеек  $r$  одинакового объема  $\Delta V = V/r$  таких, что в каждую ячейку  $i$  в среднем попадает большое число частиц  $n_i$ , и будем характеризовать макросостояние числами  $n_i$ . Тогда число способов размещения атомов или молекул по этим ячейкам и будет пространственным статвесом системы, т.е. число  $\Omega_{\text{пр}}$  равно числу различных способов размещения  $N$  атомов по этим ячейкам. Каждое состояние будет характеризоваться наличием определенного числа атомов  $n_i$  в каждой ячейке  $i$  вне зависимости от того, как атомы распределены внутри ячейки.  $n_i$  атомов внутри ячейки можно расположить  $n_i!$  способами (см. (2.20)). Поскольку все эти способы мы принимаем за одно состояние, то число различных состояний равно

$$\Omega_{\text{пр}} = \frac{N!}{n_1!n_2!\dots n_r!} \quad (2.22)$$

Если система не находится во внешнем поле, то в каждой ячейке в среднем будет находиться одинаковое число частиц  $n_1 = n_2 = \dots = n_r = n$ . Тогда

$$\Omega_{\text{пр}} = \frac{N!}{(n!)^r} \quad (2.23)$$

Для больших  $N$  согласно формуле Стирлинга имеем  $\ln N! \approx N \ln N - N$ , и, следовательно

$$\begin{aligned} S_{\text{пр}} &= \ln \Omega_{\text{пр}} = \ln N! - r \ln n! \approx N \ln N - N \ln n = N \ln(N/n) \\ &= N \ln(V/\Delta V) = N \ln V + S_1 \end{aligned} \quad (2.24)$$

где  $S_1$  – некоторая постоянная, при выводе использовалось соотношение  $N = nr$ .

**Расчет  $S_{\text{ск}}$ .** Аналогичный подход применим и для  $\Omega_{\text{ск}}$ . Поскольку  $\Omega_{\text{ск}}$  – число различных способов размещения атомов по скоростям (см. (2.19)), то для вычисления  $\Omega_{\text{ск}}$  следует работать в *пространстве скоростей*. В декартовой системе координат пространства скоростей вектор скорости  $\dot{\mathbf{v}}$  задается координатами  $v_x, v_y, v_z$  точно так же, как в обычном пространстве положение точки (радиус-вектор  $\dot{\mathbf{r}}$  точки) задается пространственными координатами  $x, y, z$ . Разобьем объем в пространстве скоростей (согласно функции распределения Максвелла (1.30) скорости атомов могут иметь сколь угодно большие значения, поэтому объем пространства скоростей бесконечен) на ячейки  $i$  одинакового объема  $\Delta V^{\text{ск}}$ , в которых содержится число частиц  $n_i^{\text{ск}}$ . Ячейки возьмем такие, что в области среднеквадратичных значений скоростей в каждую такую ячейку будет в среднем попадать большое число значений скоростей атомов. Для  $\Omega_{\text{ск}}$  справедливо выражение, аналогичное (2.22)

$$\Omega_{\text{ск}} = \frac{N!}{n_1^{\text{ск}}! n_2^{\text{ск}}! \dots n_r^{\text{ск}}!} \quad (2.25)$$

но уже выражение, аналогичное (2.23) не справедливо, поскольку согласно функции распределения Максвелла (1.30) средние значения  $n_i^{\text{ск}}$  не равны:

$$n_i^{\text{ск}} = N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv_i^2}{2kT}} \Delta V^{\text{ск}} \quad (2.26)$$

Используя формулу Стирлинга, для  $\Omega_{\text{ск}}$  из (2.25) получаем

$$S_{\text{ск}} = \ln \Omega_{\text{ск}} = \ln N! - \sum_i \ln n_i^{\text{ск}}! \approx N \ln N - N - \sum_i (n_i^{\text{ск}} \ln n_i^{\text{ск}} - n_i^{\text{ск}}) = N \ln N - \sum_i n_i^{\text{ск}} \ln n_i^{\text{ск}}$$

при выводе использовалось равенство  $N = \sum_i n_i^{\text{ск}}$ . Согласно (2.26)

$$\ln n_i^{\text{ск}} = \ln N + \ln \Delta V^{\text{ск}} + \frac{3}{2} \ln \left( \frac{m}{2\pi k} \right) - \frac{3}{2} \ln T - \frac{mv_i^2}{2kT}$$

Принимая во внимание, кроме того, соотношение

$$\sum_i n_i^{\text{ск}} \frac{mv_i^2}{2} = N \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{3}{2} NkT, \text{ справедливое для одноатомного газа,}$$

окончательно получаем

$$S_{\text{ск}} = \ln \Omega_{\text{ск}} = \frac{3}{2} N \ln T + S_2 \quad (2.27)$$

где в слагаемом  $S_2$  (являющемся некоторой постоянной) объединены все слагаемые, не зависящие от термодинамических параметров.

Итак, окончательно для энтропии  $\nu$  молей одноатомного идеального газа с учетом (2.21), (2.24), (2.27) и соотношений  $N = \nu N_A$ , (2.13) и (1.10) получаем

$$S = \nu(R \ln V + C_V \ln T) + S_3 \quad (2.28)$$

Слагаемое  $S_3 = k(S_1 + S_2)$  является постоянным, оно не содержит термодинамических параметров.

**Связь изменения энтропии системы с переданным количеством теплоты.** Рассмотрим бесконечно малое изменение энтропии. С учетом соотношения 1 приложения и формулы (2.28) бесконечно малые приращения  $S$ ,  $V$  и  $T$  связаны между собой как

$$TdS = \nu \left( \frac{RT}{V} dV + C_V dT \right) \quad (2.29)$$

Соотношения (2.7), (2.12), (2.13) и (2.10) для бесконечно малых изменений  $A$ ,  $U$  и  $Q$  будут иметь вид:

$$dA = pdV$$

$$dU = \nu C_V dT$$

$$dQ = dA + dU$$

С учетом соотношений (1.11) получаем, что при обратимом сообщении тепла системе

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (2.30)$$

Выражение (2.30) получено из (2.29), однако, оно более универсально и справедливо для любых систем при обратимой передаче тепла (см. следующий раздел).

**Обратимые, необратимые процессы.** Из-за большого числа частиц в термодинамике используется описание систем на основе средних значений, вероятностей, функций распределений. Но усредненные характеристики предполагают отклонение характеристик отдельных объектов от средних величин, средние значения как раз и получаются в результате усреднения реальных несовпадающих между собой значений. Чем больше частиц в системе, тем меньше отклонение какой-то определенной физической величины от своего среднего значения или от значения, предписываемого ей функцией распределения. Отклонения значений от среднего называются *флуктуациями*. Итак, в термодинамических системах всегда присутствуют флуктуации.

Рассмотрим систему из двух подсистем  $S_1$  и  $S_2$ , одна из которых (1-ая) является одноатомным идеальным газом. Допустим, в первой подсистеме возникла бесконечно малая флуктуация температуры. В силу этого можно считать, что температура системы не изменилась, следовательно, и энтропия системы также не изменилась  $dS = 0$ . За счет флуктуации температуры 1-ая подсистема получит или отдаст количество теплоты  $dQ$ . Поскольку температура системы не изменилась, процесс передачи тепла можно считать обратимым (см. следующий раздел – идеальная тепловая машина), тогда в силу аддитивности энтропии (см. свойство 3 энтропии) и (2.30) имеем

$$dS = dS_1 + dS_2 = \frac{dQ}{T} + dS_2 = 0$$

откуда следует, что выражение (2.30) справедливо для произвольной подсистемы. В частности, выражение (2.29) справедливо для любого



идеального газа, не только одноатомного, нужно только в качестве  $C_V$  брать соответствующую этому газу молярную теплоемкость (2.13).

Если передача тепла происходит необратимым образом, то  $dS > dQ/T$ , поскольку теперь энтропия дополнительно увеличивается также за счет необратимых процессов, увеличивающих статистический вес системы. Итак, окончательно

$$dS = \frac{dQ}{T}, \text{ для обратимых процессов} \quad (2.31)$$

$$dS > \frac{dQ}{T}, \text{ для необратимых процессов} \quad (2.32)$$

**Идеальная тепловая машина.** Оказывается, что к.п.д. тепловых двигателей максимален в случае, когда цикл, на котором работает тепловая машина, состоит из обратимых процессов. Такая тепловая машина называется *идеальной*. Сначала мы получим к.п.д. идеальной тепловой машины, а потом покажем, что к.п.д. любой другой тепловой машины меньше. Передача теплоты при взаимодействии систем не может происходить от менее нагретой системы (системы с меньшей температурой) более нагретой. Поэтому, если температуры систем отличаются, то передача теплоты от более нагретой системы менее нагретой будет возможна, а наоборот – нет. Таким образом, обратимая передача теплоты возможна только в изотермических процессах. Следовательно, для реализации цикла идеальной тепловой машины мы можем пользоваться только изотермами и адиабатами. Цикл, представляющий собой две изотермы и две адиабаты называется *циклом Карно* (рис. 2.4).

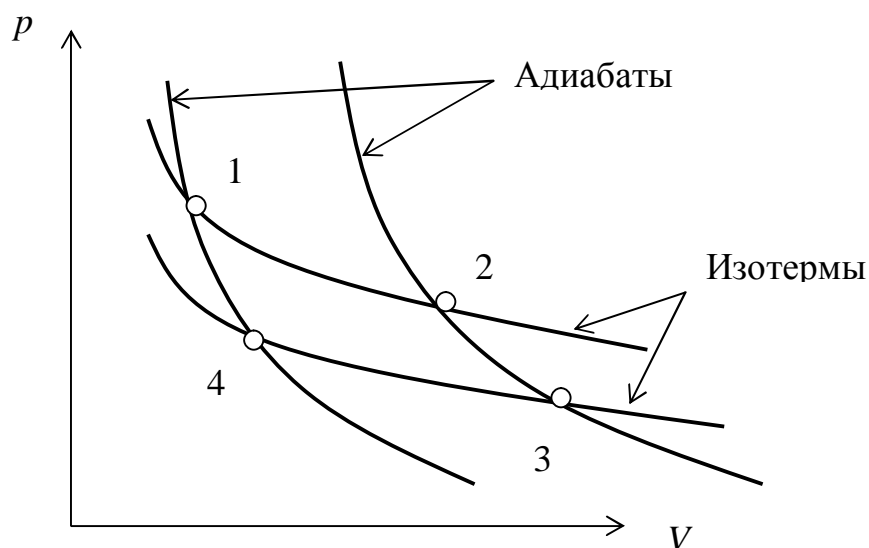


рис. 2.4

**Цикл Карно. К.п.д. идеальной тепловой машины.** Энтропия есть функция состояния системы (2.17). Следовательно, изменение энтропии

системы за цикл 1-2-3-4-1 равно нулю, поскольку система из состояния 1 возвращается опять в состояние 1

$$0 = \Delta S = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41} \quad (2.33)$$

На участках адиабат 2-3 и 4-1 изменения энтропии согласно (2.31) равно нулю  $\Delta S_{23} = \Delta S_{41} = 0$ , поскольку в адиабатических процессах передача теплоты не происходит. На участке 1-2 система получает от нагревателя количество теплоты  $Q_1$ , на участке 3-4 система отдает холодильнику количество теплоты  $Q_2$ . Согласно этому же соотношению (2.31) имеем  $\Delta S_{12} = Q_1/T_1$ ,  $\Delta S_{34} = -Q_2/T_2$ , где  $T_1$  и  $T_2$  – соответственно температуры нагревателя и холодильника.

Следовательно, из (2.33) получаем, что

$$0 = Q_1/T_1 - Q_2/T_2$$

Теперь из (2.16) окончательно получаем *к.п.д. идеальной тепловой машины*

$$\eta_{\text{ид}} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (2.34)$$

**К.п.д. неидеальной тепловой машины.** Если цикл тепловой машины включает необратимые процессы, то при получении рабочей системой тепла от нагревателя согласно (2.32)  $\Delta S_{\text{н}} > Q_1/T_1$ , а при сбрасывании тепла в холодильник  $\Delta S_{\text{х}} > -Q_2/T_2$ . За цикл изменение энтропии по-прежнему равно нулю, поскольку система возвращается в первоначальное состояние, а энтропия есть функция состояния. Тогда получаем

$$0 = \Delta S > Q_1/T_1 - Q_2/T_2$$

т.е.

$$Q_2/T_2 > Q_1/T_1$$

и, соответственно

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1 - \frac{T_2}{T_1} = \eta_{\text{ид}} \quad (2.35)$$

Итак, к.п.д. любой тепловой машины не превосходит к.п.д. идеальной тепловой машины, работающей на цикле Карно.

Соответственно, для холодильного коэффициента получаем

$$k \leq \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

где знак равенства относится к обратимому, а знак неравенства – к необратимому циклическим процессам.

**Формулировки Клаузиуса и Кельвина второго начала термодинамики.** Второе начало термодинамики (2.18) известно также в формулировках Клаузиуса и Кельвина. Все эти три формулировки эквивалентны.

**Формулировка Клаузиуса.** *Невозможны такие процессы, единственным конечным результатом которых был бы переход тепла от тела менее нагретого (т.е. с более низкой температурой) к телу более нагретому (т.е. с более высокой температурой).*

В холодильных машинах тепло передается от менее нагретых тел более нагретым, однако, это не единственный результат работы этих машин. Для такого перевода тепла нужно затрачивать работу (см. раздел холодильная машина).

**Формулировка Кельвина.** *Невозможен такой периодически действующий двигатель, который получал бы тепло от одного резервуара и превращал бы его полностью в работу.*

Или: *невозможны такие процессы, единственным конечным результатом которых явилось бы получение от некоторого тела определенного количества теплоты и превращение его полностью в работу.*

Например, согласно первому началу термодинамики при передаче газу теплоты, он может совершать работу. Но совершение работы в данном случае не единственный результат. Совершение работы при этом сопровождается расширением газа.

Если бы мы могли полностью переводить полученное тепло в работу, т.е. нарушалось бы второе начало термодинамики в формулировке Кельвина, то мы могли бы его, например, с помощью трения передать телу с более высокой температурой, т.е. пришли бы к нарушению второго начала термодинамики в формулировке Клаузиуса.

С другой стороны, если бы нарушалось бы второе начало термодинамики в формулировке Клаузиуса, то тогда в тепловой машине, холодильником которой служил бы исходный резервуар, из которого мы берем тепло, мы пришли бы к нарушению второго начала термодинамики в формулировке Кельвина.

**Вечные двигатели первого и второго рода.** Наблюдая за неизменностью природных явлений (движение планет и звезд, приливы и отливы, течение рек и т.д.), человек задумывался о возможности создания искусственного вечного движения, например, с целью использования его для своих нужд. Насколько известно, такая идея впервые возникла в Индии в XII веке. Практический интерес появляется в средневековых городах Европы в XIII веке.

Любая деталь рано или поздно изнашивается, поэтому под *вечным двигателем* или ррм (от “perpetuum mobile” – постоянно действующий двигатель) подразумевается принцип действия, т.е. если детали такого искусственного устройства функционируют, то двигатель должен постоянно работать. Развитие науки, в частности, установление закона сохранения энергии, привело к пониманию невозможности извлечения энергии из «ничего». Например, официальным решением Парижской академии наук с 1775 г. прекращается рассмотрение каких бы то ни было ррм. Но, тем не менее, до сих пор продолжают появляться проекты различных ррм.

Закон сохранения энергии и первое начало термодинамики начинают проникать в среду изобретателей. Эти законы сейчас уже есть в любых, даже элементарных (школьных) руководствах и учебниках, поэтому в современных

проектах  $ppm$  законы сохранения энергии, как правило, выполняются. Однако, работа уже таких  $ppm$  возможна только при нарушении 2-го начала термодинамики, поэтому они называются «вечными двигателями второго рода» или  $ppm-2$  (понятие ввел В. Оствальд в 1892 г.). Первые проекты  $ppm-2$  появились не ранее последней четверти XIX века.

Итак, под *вечным двигателем* понимают гипотетическое, несуществующее устройство по производству работы, принцип действия которого основан на нарушении первого ( $ppm-1$ ) или второго ( $ppm-2$ ) начала термодинамики.

## Приложение. Вывод уравнения адиабаты

Для решения уравнения

$$C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = 0$$

нам понадобятся некоторые соотношения, которые школьники узнают обычно в 11 классе:

1. Пусть  $dA$  – бесконечно малое приращение величины  $A$ , тогда  $dx/x = d \ln x$
2.  $\ln x + \ln y = \ln(xy)$ , в частности,  $p \ln x = \ln(x^p)$

где  $\ln$  – это логарифм по основанию  $e$  ( $e \approx 2.71828$ ).

Перейдем к решению уравнения. С учетом соотношения 1 получаем, что

$$C_V d \ln T + R d \ln V = 0$$

Приращение от суммы величин равно сумме приращений этих величин, поэтому с учетом того, что  $C_V$  и  $R$  являются постоянными, получаем

$$\frac{C_V}{R} d \ln T + d \ln V = d \left( \frac{C_V}{R} \ln T + \ln V \right) = d \left( \ln T^{C_V/R} + \ln V \right) = d \ln \left( T^{C_V/R} V \right)$$

где в предпоследнем и последнем равенствах использовано соотношение 2.

Если приращение (не важно какое – конечное или бесконечно малое) некоторой величины в любой точке в точности равно нулю, то эта величина есть константа  $C$ , следовательно, решение нашего уравнения есть

$$\ln(T^{C_V/R} V) = C$$

или

$$T^{C_V/R} V = e^C = const$$

### Примеры решения задач

1. Газ находится в вертикальном цилиндре с площадью дна  $S = 10 \text{ см}^2$ . Цилиндр закрыт перемещающимся без трения поршнем массой  $m = 9.8 \text{ кг}$ . Начальный объем газа  $V_0 = 5.0 \text{ л}$ , температура  $t_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ . Давление наружного воздуха  $p_a = 100 \text{ кПа}$ . Какое количество теплоты  $Q$  необходимо затратить для нагревания газа при этих условиях на  $\Delta T = 10 \text{ К}$ ? Известно, что повышение температуры газа на ту же величину при закрепленном поршне потребовало бы количества теплоты  $Q_1 = 90 \text{ Дж}$ .

$$\text{Ответ: } Q = Q_1 + \frac{(mg + p_a S)V_0 \Delta T}{ST_0} = 1.3 \cdot 10^2 \text{ Дж.}$$

**Решение.** При закрепленном поршне газ не совершает работы и поэтому согласно первому началу термодинамики  $Q_1 = \Delta U$ . В случае, когда поршень не закреплен, газ расширяется изобарно. В этом случае  $\Delta U$  остается прежней, поскольку она зависит только от изменения температуры. Работа газа при расширении  $A = p\Delta V$ , так что

$$Q = \Delta U + A = Q_1 + p\Delta V$$

Учтем также, что  $p = mg/S + p_a$  и  $\Delta V/V_0 = \Delta T/T_0$  (при изобарном процессе объем прямо пропорционален температуре газа). Тогда

$$Q = Q_1 + \frac{(mg + p_a S)V_0 \Delta T}{ST_0} = 1.3 \cdot 10^2 \text{ Дж.}$$

2. При изотермическом расширении азота массой  $m = 100 \text{ г}$ , имевшего температуру  $T = 280 \text{ К}$ , его объем увеличился в 3 раза. Найти работу, совершенную газом при расширении, изменение внутренней энергии газа и количество теплоты, сообщенное газу.

$$\text{Ответ: } A = \frac{m}{\mu} RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 9.13 \cdot 10^3 \text{ Дж}; \Delta U = 0; Q = A = 9.13 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

**Решение.** Из уравнения Менделеева-Клапейрона находим

$$p = \frac{mRT}{\mu V} \quad (1)$$

Видно, что при  $T = \text{const}$  (изотермический процесс) давление газа убывает обратно пропорционально объему. Работа газа равна площади фигуры на  $p$ - $V$  диаграмме, ограниченной графиком с приведенной зависимостью  $p(V)$  (гипербола (1)), прямыми  $V = V_1$  (начальный объем газа),  $V = V_2$  (конечный объем газа) и осью  $V$ . Итак

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{mRT}{\mu V} dV = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

С учетом того, что молярная масса азота  $\mu = 28$  г/моль, получаем  $A = 9 \cdot 10^3$  Дж. Поскольку процесс изотермический, то изменение внутренней энергии  $\Delta U = 0$ . Согласно первому началу термодинамики, следовательно, имеем  $Q = A = 9 \cdot 10^3$  Дж.

3. Горизонтально расположенный цилиндрический теплоизолированный сосуд объема  $V_0 = 100$  л, заполненный гелием, разделен на две части теплонепроницаемым поршнем, который может перемещаться без трения. Газу, находящемуся в левой части сосуда, сообщают количество тепла  $Q = 100$  Дж. Найти изменение давления в сосуде к тому моменту, когда поршень перестанет двигаться.

$$\text{Ответ: } \Delta p = \frac{2}{3} \frac{Q}{V_0} = 667 \text{ Н/м}^2.$$

**Решение.** После подведения тепла  $Q$  газ в левой части сосуда расширяется, совершая работу  $A$ . Эта работа целиком идет на увеличение энергии газа в правой части сосуда. Таким образом,

$$Q = \Delta U + A = \Delta U_1 + \Delta U_2 = \frac{3}{2} R \left( \frac{m_1}{\mu} \Delta T_1 + \frac{m_2}{\mu} \Delta T_2 \right) \quad (1)$$

До нагревания  $p_1 = p_2 = p$ . Уравнения состояния в левой и правой частях сосуда:

$$pV_i = \frac{m_i}{\mu} RT_i$$

$i = 1, 2$ .  $m_1, m_2, V_1, V_2$  – соответственно массы газа в левой и правой частях цилиндра и объемы левой и правой частей цилиндра,  $\mu$  – молярная масса гелия,  $V_1 + V_2 = V_0$ . После нагревания, когда поршень остановится, давления в левой и правой частях уравниваются. Обозначим увеличение давления в сосуде через  $\Delta p$ , а увеличение объема левой части сосуда через  $\Delta V$ . Тогда

$$(p + \Delta p)(V_1 + \Delta V) = \frac{m_1}{\mu} R(T_1 + \Delta T_1)$$

$$(p + \Delta p)(V_2 - \Delta V) = \frac{m_2}{\mu} R(T_2 + \Delta T_2)$$

После несложных преобразований получаем:

$$\Delta p(V_1 + V_2) = R \left( \frac{m_1}{\mu} \Delta T_1 + \frac{m_2}{\mu} \Delta T_2 \right)$$

или с учетом (1)

$$\Delta p V_0 = \frac{2}{3} Q$$

т.е. 
$$\Delta p = \frac{2}{3} \frac{Q}{V_0} = 667 \text{ Н/м}^2.$$

4. Найти удельную теплоемкость идеального одноатомного газа, если нагревание осуществляется так, что среднеквадратичная скорость  $u$  теплового движения его атомов массой  $m$  увеличивается прямо пропорционально давлению  $p$ .

**Ответ:**  $c = 2k/m$ .

**Решение.** Внутренняя энергия одного моля идеального одноатомного газа равна  $3RT/2$ . С другой стороны, кинетическая энергия одного моля частиц массой  $m$ , среднеквадратичная скорость которых равна  $u$ , равна  $mu^2N_A/2$ , следовательно, абсолютная температура таких частиц  $T = mu^2/3k$ . По условию задачи нагревание ведется так, что  $u = \alpha p$ , где  $\alpha$  – некоторая постоянная. Согласно уравнению Клапейрона объем одного моля идеального газа при давлении  $p$  и температуре  $T$  равен  $V = RT/p$ , следовательно, с учетом предыдущего соотношения можно утверждать, что с ростом температуры объем газа и его давление будут увеличиваться пропорционально квадратному корню из абсолютной температуры, точнее

$$V(T) = R\alpha\sqrt{\frac{mT}{3k}}; \quad p(T) = \alpha^{-1}\sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (1)$$

т.е. имеем  $p = \beta V$ , где  $\beta$  – некоторая постоянная. Итак, при заданном способе нагревания одновременно будет увеличиваться внутренняя энергия газа и газ будет совершать работу.

Работа газа равна площади фигуры на  $p$ - $V$  диаграмме, ограниченной графиком с приведенной зависимостью  $p(V)$  (прямая  $p = \beta V$ , проходящая через начало координат), прямыми  $V = V_1 = V(T)$  (начальный объем газа),  $V = V_2 = V(T + \Delta T)$  (конечный объем газа) и осью  $V$ . Используя формулу для вычисления площади трапеции и соотношение (1), найдем работу моля газа при его нагревании от температуры  $T$  до температуры  $T + \Delta T$ :

$$A = \frac{(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)}{2} = \frac{R\Delta T}{2}$$

На основании первого начала термодинамики количество теплоты  $Q$ , необходимое для повышения температуры моля на величину  $\Delta T$ , равно

$$Q = \Delta U + A = 3R\Delta T/2 + R\Delta T/2 = 2R\Delta T.$$

Итак, молярная теплоемкость газа  $C_v = 2R$ , а т.к. молярная масса данного газа  $\mu = mN_A$ , то искомая удельная теплоемкость должна быть равна  $c = C_v/\mu = 2k/m$ .

5. Эффективно отапливать помещения можно с помощью электронагревательных приборов: при этом вся потребляемая электроэнергия превращается во внутреннюю и передается воздуху в помещении, т.е. к.п.д. = 100%. Однако существует нагреватель с большим к.п.д. – так называемый «тепловой насос», который отбирает энергию для обогрева комнаты у наружного воздуха. Чему равен к.п.д. теплового насоса, работающего по циклу Карно, если температура воздуха в помещении равна  $T$ , а на улице  $T'$ .



**Ответ:**  $\eta_{\text{тн}} = \frac{T}{T - T'}$ .

**Решение.** Никакого противоречия с законом сохранения энергии здесь нет. Если за один цикл работы тепловой насос потребляет из сети энергию  $W$  и передает воздуху в комнате количество теплоты  $Q > W$  (при этом коэффициент полезного действия  $\eta_{\text{тн}} = Q/W > 1$ ), то недостающее количество теплоты  $Q' = Q - W$  поступает от наружного воздуха. Так может действовать тепловой двигатель, запущенный «в обратную сторону»: отбирающий тепло у менее нагретого тела (наружного воздуха с температурой  $T'$ ) и передающий тепло более нагретому телу (воздуху в комнате с температурой  $T > T'$ ). Если «обратить» работу теплового насоса, работающего по обратимому циклу, и заставить его работать как обычный тепловой двигатель, то его к.п.д.

$$\eta_{\text{тд}} = \frac{W}{Q} = \frac{T - T'}{T} < 1$$

(из обратимости следует, что за один цикл совершается полезная работа  $W$ ).

Тогда  $\eta_{\text{тн}} = \frac{1}{\eta_{\text{тд}}} = \frac{T}{T - T'} > 1$

Чем меньше разность температур  $T - T'$ , тем меньше энергии потребуется для отопления. Так, при  $t = 20^\circ\text{C}$  и  $t' = 10^\circ\text{C}$  величина  $W$  составляет лишь 3.4% от величины  $Q$ ; при  $t = 20^\circ\text{C}$  и  $t' = -20^\circ\text{C}$  эта доля составляет уже 14%. Работа теплового насоса по обратимому циклу труднореализуема. Тем не менее, в реальных установках экономия энергии все равно получается очень большой. Широкому распространению тепловых насосов мешает пока их бо́льшая стоимость по сравнению с нагревательными приборами.

6. Рабочим телом тепловой машины является одноатомный идеальный газ. Определите к.п.д. тепловой машины, график цикла которой показан на рисунке.

**Ответ:**  $\eta = 0.15$ .

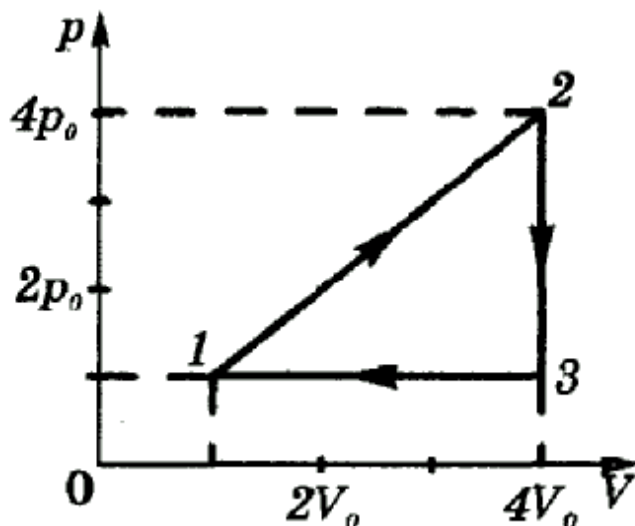
**Решение.** К.п.д. цикла  $\eta = A/Q$ , где  $A$  – работа газа за цикл,  $Q$  – количество теплоты, полученное от нагревателя за цикл. Работа газа численно равна площади треугольника 1-2-3, поэтому

$$A = \frac{3V_0 \cdot 3p_0}{2} = \frac{9p_0 V_0}{2}$$

Газ получает тепло только на этапе 1-2: здесь происходит расширение газа (т.е.  $A_{1-2} > 0$ ) и его нагревание (т.е.  $\Delta U_{1-2} > 0$ ), так что

$$Q_{1-2} = \Delta U_{1-2} + A_{1-2}$$

На двух других этапах газ тепло отдает. Работа  $A_{1-2}$  вычисляется как



площадь соответствующей трапеции:

$$A_{1-2} = \frac{p_0 + 4p_0}{2} 3V_0 = \frac{15p_0V_0}{2}$$

Изменение внутренней энергии газа на этапе 1-2 составит

$$\Delta U_{1-2} = \frac{3}{2} \nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2} (4p_0 4V_0 - p_0 V_0) = \frac{45p_0V_0}{2}$$

Следовательно,  $Q = Q_{1-2} = 30p_0V_0$  и  $\eta = 0.15$ .