

Общеобразовательная школа №1189 им. И.В. Курчатова

Твердые тела

Составитель: Бойченко А.М.
Пособие по физике, 10 класс
твердые тела

Москва 2009

Оглавление

1 Твердые тела	3
Кристаллы.....	3
Поликристаллы.....	4
Дефекты в кристаллах.....	4
Аморфные тела.....	4
2 Деформации в твердых телах	5
Деформации растяжения и сжатия	5
Коэффициент Пуассона	6
Изменение объема при деформации растяжения-сжатия.....	6
Закон Гука.....	7
Диаграмма растяжения.....	7
Плотность энергии.....	9
Всестороннее сжатие.....	9
Деформации сдвига.....	11
Изменение объема при сдвиговых деформациях.....	11
Плотность энергии.....	12
Напряжения в общем случае.....	12
Связь модуля сдвига и модуля Юнга.....	12
3 Тепловое расширение твердых тел	13
Линейное тепловое расширение.....	13
Объемное тепловое расширение.....	13
Термометры.....	14
Приложение 1. Примеры кристаллических решеток.....	15
Приложение 2. Решетки Браве	17
Примеры решения задач	18

1. Твердые тела

Отличительной особенностью твердых тел является их способность сохранять свой объем и форму. Большинство твердых тел представляют собой *кристаллы (кристаллические тела)*.

Кристаллы. Положения атомов веществ определяется минимумом потенциальной энергии их взаимодействия, который достигается при условии их регулярного, периодического расположения. Это расположение называется *кристаллической решеткой* (примеры в приложении 1). Поскольку атомы кристалла расположены периодическим образом в пространстве, то естественно кристаллическую решетку характеризовать некоторым элементарным «кирпичиком», параллелепипедом, повторением которого в различных направлениях (т.е. параллельными переносами или *трансляциями*) можно воспроизвести всю кристаллическую решетку. Такой «кирпичик» называется *элементарной ячейкой* кристалла. Выбор элементарной ячейки неоднозначен и осуществляется на основе симметрии трансляций кристалла. Всего имеется 14 типов различных трансляционных симметрий, называемых *решетками Браве* (приложение 2). *Симметрией кристаллов* называется свойство совмещения кристаллических решеток при поворотах, отражениях, параллельных переносах и т.д. или совокупности этих операций, и описывается группами симметрий. Т.о. *трансляционная симметрия* кристалла является лишь малой частью его симметрии. Упомянутый параллелепипед (элементарная ячейка) минимального объема, содержащий наименьшее число атомов, называется *примитивной ячейкой*. Примитивная ячейка кристаллов химических элементов может содержать один атом, химических соединений – до сотни атомов, белковых кристаллов, вирусов – до 10^3 - 10^6 атомов.

Точечная симметрия кристалла отражает симметрию кристалла относительно *точечных преобразований* – т.е. преобразований, оставляющих неподвижной хотя бы одну точку объекта. Например, трансляция не является точечным преобразованием. Симметрия решетки Браве относительно точечных преобразований называется *сингонией (кристаллической системой)* и описывается 7 группами (симметриями), соответствующих разным сингониям (см. приложение 2). Точечное преобразование, переводящее решетку Браве в себя, не обязательно переводит в себя кристалл (если в элементарной ячейке содержится всего один атом, то такое преобразование переводит, конечно же, и кристалл в себя), поэтому группа точечной симметрии кристалла должна быть подгруппой группы точечной симметрии решетки Браве. Таких подгрупп имеется 32 (Хессель), называемых *кристаллографическими классами*.

Кроме симметрии относительно трансляций и точечных преобразований, кристаллическая решетка может обладать дополнительными элементами симметрии. Полная *пространственная симметрия* (т.е. симметрия относительно преобразований, переводящих кристаллическую решетку в себя)

насчитывает 230 пространственных групп симметрий (Федоров, независимо от него Шенфлис), называемых *федоровскими группами*. Любой кристалл симметричен относительно одной из этих групп.

Независимость свойств какого-либо объекта или системы от направления называется *изотропией (изотропностью)*. Наличие кристаллической решетки делает кристаллы *анизотропными* объектами, т.е. физические свойства кристалла зависят от выбранного внутри него направления. Большие кристаллы называются *монокристаллами*. Если не принимать специальных мер, то чаще всего формирование твердого тела приводит не к кристаллической, а к поликристаллической структуре. Выращивание крупных монокристаллов в общем случае представляет собой серьезную научно-техническую задачу.

Поликристаллы. Обычно процесс кристаллизации начинается одновременно в большом числе центров кристаллизации. Рост кристаллов продолжается до тех пор, пока они не приходят в соприкосновение друг с другом, формируя единое твердое тело. Такие тела (*поликристаллы*) в результате оказываются состоящими из множества отдельных беспорядочно ориентированных мелких кристаллических зерен (*кристаллитов*) и в масштабах, превышающих размеры зерен, представляют собой изотропные объекты. Характерным представителем поликристаллов являются металлы. Зернистая структура металлов хорошо видна в микроскоп или лупу.

Дефекты в кристаллах. В процессе формирования кристалла могут возникать различные дефекты кристаллической решетки, т.е. отклонения от идеальной периодической структуры. Границы зерен поликристаллов являются примером поверхностных дефектов. Кроме того, дефекты могут быть точечными, линейными (*дислокации*) и объемными. Примером точечного дефекта является наличие в узле кристаллической решетки чужеродного атома или иона, либо вообще его отсутствие (*вакансия*). Примерами объемных дефектов служат скопление вакансий, образующие поры и каналы, включение посторонней фазы, пузырьки газов, скопления примесей и т.д.

Аморфные тела. Не все твердые тела имеют кристаллическую решетку. В этом случае ближайшие соседи какого-либо из атомов располагаются в некотором порядке (*ближний порядок*), но при удалении от него этот порядок нарушается, в результате отсутствует строгая периодичность расположения атомов (*дальний порядок*). Отсутствие дальнего порядка приводит к изотропии свойств твердого тела. Такие тела называются *аморфными*. Примерами могут служить стекло, многие пластмассы, смола, битум, канифоль и т.д.

Ближний порядок характерен и для жидкостей, но в них происходит частая смена местоположения соседних атомов, уменьшающаяся по мере увеличения вязкости жидкости. В силу этого аморфные тела можно рассматривать как переохлажденную жидкость с очень высоким коэффициентом вязкости. Аморфные тела обладают и упругостью (как твердые тела) и текучестью (как жидкости). При низких температурах аморфные тела практически не обладают текучестью. По мере повышения температуры они

постепенно размягчаются и их свойства все более приближаются к свойствам жидкостей. Так, например, кусок смолы постепенно растекается по твердой поверхности. Никакой определенной температуры плавления у аморфных тел нет.

Многие тела могут находиться как в кристаллическом, так и аморфном состояниях (например, кварц (SiO_2) рис. 1, а – кристаллическое состояние, б – аморфное состояние). При кристаллизации процесс «выстраивания» атомов в кристаллическую решетку может занимать значительное время. В таких случаях быстрое охлаждение расплава может приводить к формированию аморфного состояния.

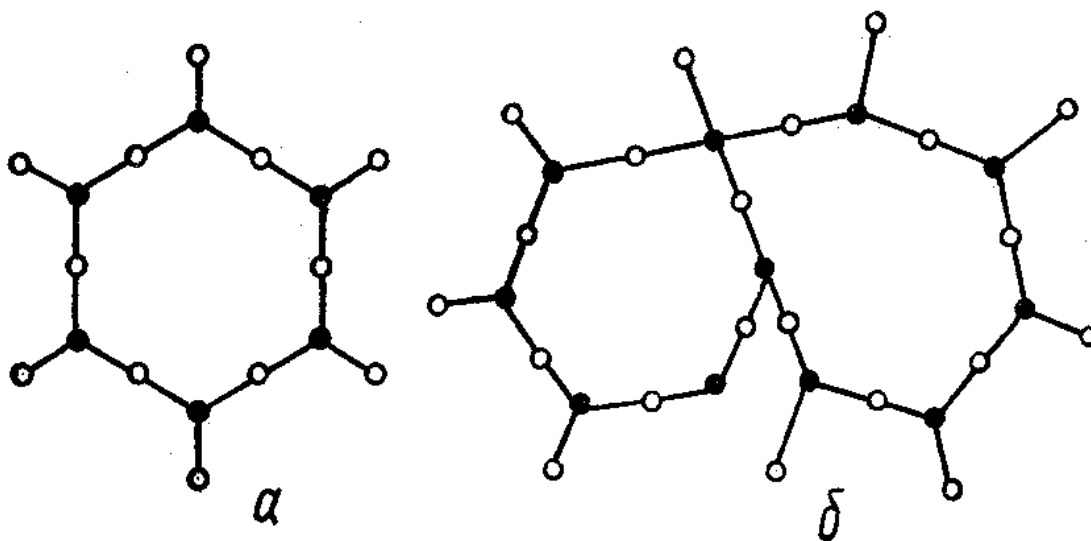


рис. 1

Аморфное состояние не является термодинамически равновесным. Если аморфное тело предоставить самому себе, то оно, в конечном счете, перейдет в кристаллическое (равновесное) состояние, но на такой переход в обычных условиях может уйти сотни лет.

2. Деформации в твердых телах

Рассмотрение многих задач деформаций твердых тел значительно облегчается малостью возникающих в таких задачах относительных деформаций. В подавляющем большинстве наиболее интересных случаев это связано с рассмотрением строительства объектов, в которых не допустимо возникновение больших деформаций, приводящих к их разрушению. В результате обычно достаточно использования изменения различных величин с точностью до первого порядка по возникающим деформациям.

Деформации растяжения-сжатия. Закрепим один из концов стержня длиной l , а второй будем растягивать или сжимать (рис. 2 для случая растяжения). В результате приложения силы стержень растянется на величину

$$\Delta l = l_1 - l$$

которая называется *абсолютным удлинением* стержня. Наряду с абсолютным часто используется *относительное удлинение*

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

при сжатии стержня его абсолютное удлинение отрицательно. *Напряжением* (механическим напряжением) называется отношение модуля силы упругости F к площади поперечного сечения S .

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (1)$$

Данное напряжение называют *нормальным*, поскольку прикладываемая сила (называемая нормальной) перпендикулярна сечению.

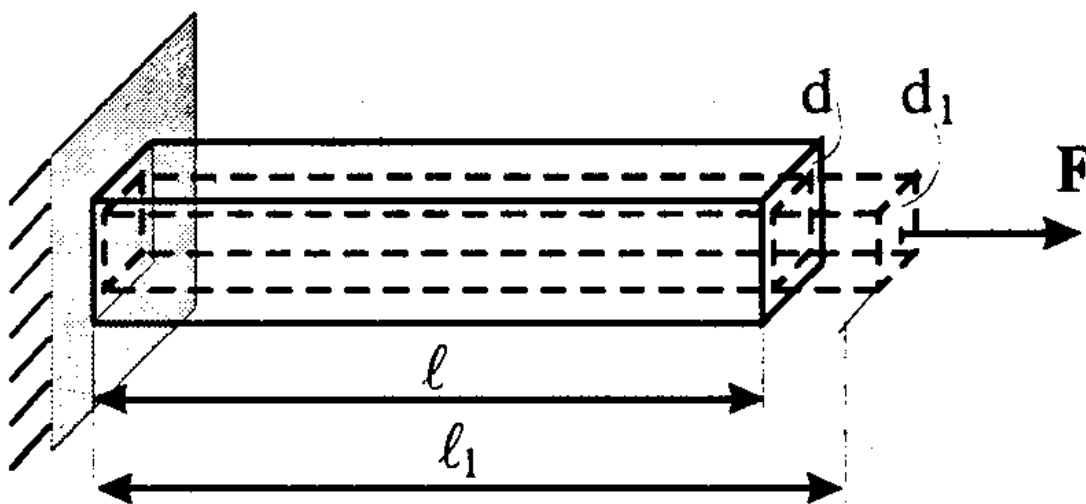


рис. 2

Коэффициент Пуассона. При растяжении стержня его поперечные размеры будут уменьшаться (рис. 2). Это уменьшение характеризуется относительным уменьшением поперечных размеров стержня

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{d_1 - d}{d} = \frac{\Delta d}{d}$$

Из опыта известно, что его отношение к относительному удлинению приблизительно сохраняется постоянным при разных деформациях одного и того же материала. Это отношение, взятое с обратным знаком

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon} \quad (2)$$

называется *коэффициентом Пуассона*.

Изменение объема при деформации растяжения-сжатия. Пусть у нас имеется прямоугольный параллелепипед со сторонами a , b и c . При их изменении объем станет равным

$$\begin{aligned}
 V_1 &= a_1 b_1 c_1 = (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) = \\
 &= abc(1 + \Delta a/a)(1 + \Delta b/b)(1 + \Delta c/c) = \\
 &= V(1 + \varepsilon_a)(1 + \varepsilon_b)(1 + \varepsilon_c)
 \end{aligned} \tag{3}$$

где ε с индексами означают относительные изменения соответствующих размеров. В нашем случае, учитывая малость относительных изменений (оставляя линейные по ним слагаемые), (3) представляет собой

$$V_1 = ld^2(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon_{\perp})^2 \approx V(1 + \varepsilon + 2\varepsilon_{\perp})$$

Относительное изменение объема при этом составит

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V_1 - V}{V} \approx \varepsilon + 2\varepsilon_{\perp} = \varepsilon(1 - 2\nu) \tag{4}$$

При растяжении объем тела не уменьшается, поэтому $0 < \nu \leq 1/2$.

Отметим, что для изотропных материалов $1/4 \leq \nu \leq 1/3$, в частности, для металлов $\nu \approx 0.3$.

Закон Гука. При малых деформациях стержня справедлив закон Гука

$$F = k\Delta l \tag{5}$$

где k – коэффициент упругости материала (или его жесткость). Из опыта известно, что он пропорционален площади сечения S стержня и обратно пропорционален его длине l . Коэффициент пропорциональности E

$$k = E \frac{S}{l} \tag{6}$$

называется *модулем Юнга* (или *модулем упругости*). Подставляя (6) в (5) получаем

$$F = \frac{ES}{l} \Delta l = ES\varepsilon$$

или

$$\sigma = E\varepsilon \tag{7}$$

Напомним еще раз, что закон Гука справедлив при малых напряжениях.

Диаграмма растяжения. В общем случае зависимость напряжения от относительного удлинения стержня дает *диаграмма растяжения* (рис. 3). Напряжение, до которого справедлив закон Гука, называется *пределом пропорциональности* (σ_p). При снятии напряжения деформации в нем исчезают. Если нагружать стержень все сильнее, то после снятия нагрузки деформация уже полностью не исчезает. Напряжение, при котором остаточная деформация не превышает 0.1% называется *пределом упругости* (σ_y). При дальнейшем возрастании нагрузки наблюдается *текучесть* образца – заметное удлинение стержня происходит без существенного увеличения напряжения, т.е. практически при постоянном напряжении. Это напряжение называется *пределом текучести* (σ_T). Течение материала происходит равномерно по всей длине стержня. За пределами области текучести дальнейшее удлинение стержня опять сопровождается существенным изменением напряжения.

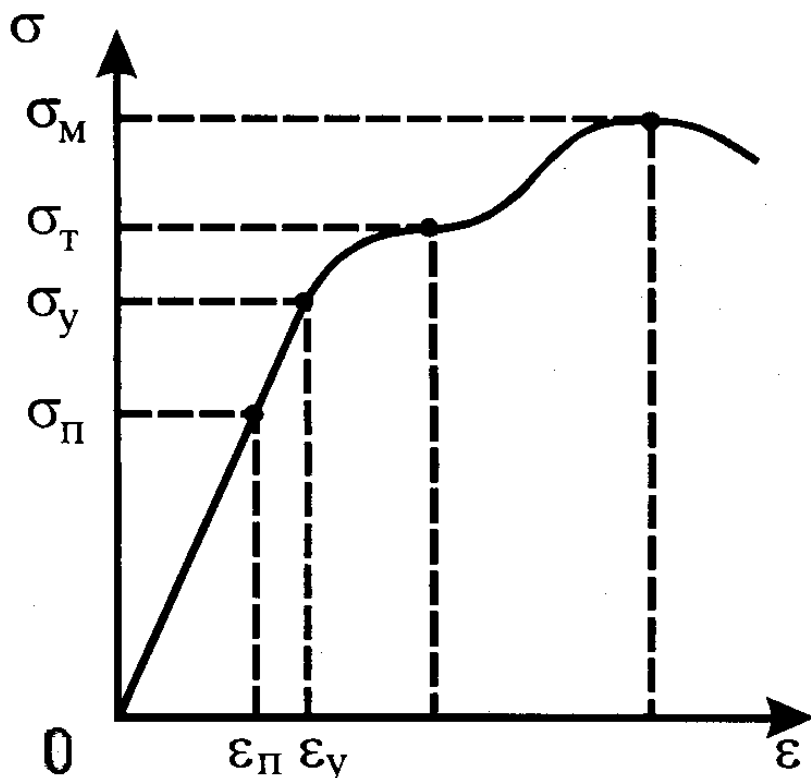


рис. 3

Деформации теперь будут распределены неодинаково по длине стержня – в некотором месте можно заметить образование шейки (рис. 4). Предельное напряжение, которое может выдержать образец, называется *пределом прочности* (σ_M). Однако, при напряжении σ_M образец рвется не сразу – разрыв происходит в месте образования шейки после еще некоторого его удлинения.

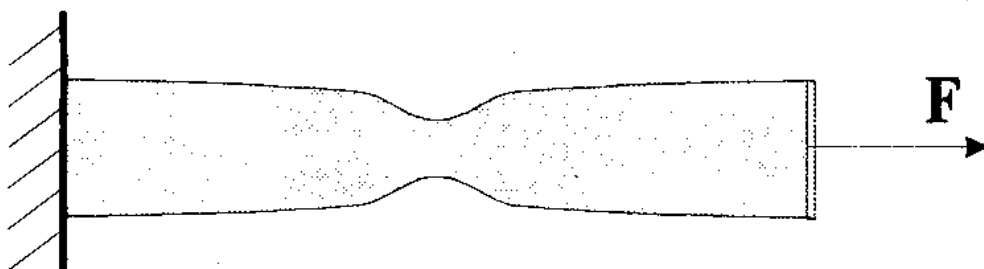


рис. 4

Из диаграммы растяжения видно, что наибольшие деформации выдерживают материалы, область текучести которых велика. Такие материалы называют *пластичными* (примеры: сталь, медь, свинец и т.д.). Если область текучести невелика, то материал называется *хрупким* (примеры: чугун, мрамор, стекло, фарфор, янтарь и т.д.). Как правило, хрупкие материалы разрушаются при $\sigma \geq \sigma_{\Pi}$.

При проектировании различных конструкций нельзя допускать образование в них опасных напряжений, поэтому ориентируются на напряжения, при которых материал не подвергается опасной деформации и не разрушается. Такие напряжения называются *допустимыми* и обозначаются $[\sigma]$. Обычно $[\sigma] < \sigma_{п}$, но выбирается как часть предела прочности, например, для металлов $[\sigma] = 0.2\sigma_{м}$, для дерева $[\sigma] = 0.1\sigma_{м}$. Отношение

$$n = \frac{\sigma_{м}}{[\sigma]}$$

называют *коэффициентом запаса прочности*. На практике, в зависимости от качества материала, характера нагрузки (статическая или динамическая), степени опасности, возникающей при разрушении и т.д., он выбирается, как правило, в диапазоне от 1.7 до 10.

Плотность энергии. Плотность энергии деформаций растяжения-сжатия можно получить, используя выражение для потенциальной энергии пружины

$$U = k(\Delta l)^2/2 \quad (8)$$

Учитывая связь (6) получаем

$$w = \frac{U}{V} = \frac{ES}{2Vl} (\Delta l)^2 = \frac{ESl}{2V} \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2 = \frac{E\varepsilon^2}{2} \quad (9)$$

Используя закон Гука (7) это соотношение можно переписать в виде

$$w = \frac{\sigma^2}{2E}$$

Всестороннее сжатие. Мы рассмотрели приложение силы вдоль одного направления. Выделим мысленно внутри образца кубический объем и рассмотрим теперь, что будет происходить при нагружении его граней нормальными силами. Относительное изменение длины кубика определяется соотношением

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu\varepsilon_2 - \nu\varepsilon_3 = \frac{\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E}$$

где первое слагаемое отвечает за изменение, непосредственно вызываемое силой (напряжением), прикладываемой вдоль этого же направления, а второе и третье слагаемые определяют вклад за счет сил (напряжений), прикладываемых в перпендикулярных направлениях (2). Аналогичные соотношения можно написать и для относительного изменения ширины и высоты кубика

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu\varepsilon_1 - \nu\varepsilon_3 = \frac{\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)}{E} \quad (10)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \nu\varepsilon_1 - \nu\varepsilon_2 = \frac{\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)}{E}$$

Если прикладываемые силы (напряжения) вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений равны между собой $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, то возникающие деформации тоже будут одинаковы $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{\sigma(1-2\nu)}{E} \quad (11)$$

В результате всесторонней деформации объем кубика станет равным (3)

$$V_1 = l^3(1 + \varepsilon)^3 \approx V(1 + 3\varepsilon)$$

а его относительное изменение составит

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V_1 - V}{V} \approx 3\varepsilon = \frac{3\sigma(1-2\nu)}{E} = k\sigma \quad (12)$$

Параметр k называется *сжимаемостью* материала. Обратная к нему величина

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (13)$$

называется *модулем всестороннего сжатия*.

Деформации сдвига. Если к телу приложить силу, не нормальную к поверхности (горизонтальная сила на рис. 5), то это приведет к сдвигу горизонтальных слоев тела друг относительно друга. Такая деформация называется *деформацией сдвига*. Горизонтальная сила в этом случае называется *касательной* (поскольку она прикладывается по касательной к поверхности) или *тангенциальной*, а возникающее напряжение – *касательным напряжением* (σ_τ). Деформация сдвига характеризуется параметром

$$\gamma = \operatorname{tg}\alpha \quad (14)$$

зависящем от угла сдвига (рис. 5), который в области пропорциональности

$$\gamma = \frac{1}{G} \frac{F}{S} = \frac{\sigma_\tau}{G} \quad (15)$$

линейно зависит от касательного напряжения, здесь S – площадь грани, к которой прикладывается касательная сила, G – *модуль сдвига*.

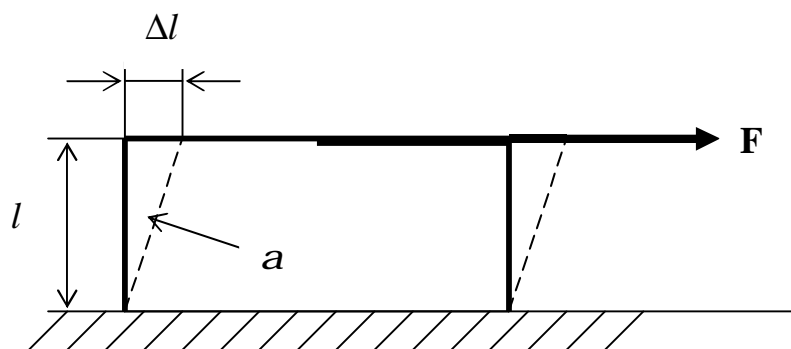


рис. 5

Изменение объема при сдвиговых деформациях. Рассмотрим изменение объема прямоугольного параллелепипеда со сторонами a , b и c (l) при сдвиговой деформации (рис. 5)

$$V_1 = abl_1 = abcc\cos\alpha \approx abc = abl = V$$

где учтено, что при деформации объем равен площади параллелограмма, умноженной на ширину (b). В свою очередь, площадь параллелограмма равна

произведению основания (длины a) на высоту l_1 . Поскольку при малых сдвиговых деформациях ($\alpha \ll 1$), как отмечалось в начале рассматриваемого п. 2, нас интересуют изменения, линейные по возникающим деформациям, а $\cos\alpha \approx 1$ (см. справочник-указатель, разложение часто встречающихся функций), то из полученного соотношения видно, что объем образца при сдвиговых деформациях не меняется.

Плотность энергии. При деформациях сдвига (15), (14), рис. 5 имеем

$$F = SG \operatorname{tg} \alpha = \frac{SG \Delta l}{l} = k' \Delta l$$

Потенциальная энергия для силы такого вида имеет вид (8) с $k = k'$. Для плотности энергии имеем

$$w = \frac{U}{V} = \frac{GS}{2Vl} (\Delta l)^2 = \frac{GSl}{2V} \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2 = \frac{G \operatorname{tg}^2 \alpha}{2} = \frac{G \gamma^2}{2} \quad (16)$$

Напряжения в общем случае. Пусть $d\dot{F}$ – сила, действующая на заштрихованную площадку dS сечения AB (рис. 6). Тогда отношение $d\dot{F} / dS$ называется напряжением $\dot{\sigma}$, действующим в точке (центре заштрихованной площадки) или на площадке dS . Направление вектора напряжения совпадает с направлением вектора силы. Проекция вектора напряжения на нормальное направление \dot{n} к площадке dS называется *нормальным* напряжением, проекция на плоскость площадки dS – *тангенциальным* напряжением, действующими на площадке dS .

Связь модуля сдвига и модуля Юнга.

Рассмотрим растяжение маленького кубика с длиной ребра $dx = l$ (рис. 7). При деформации растяжения квадратная грань $ABCD$ испытывает сдвиговую деформацию и превращается в ромбическую грань $A'B'C'D'$. Из треугольника $A'OD'$ следует, что

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \beta \right) = \frac{\frac{l}{2} + \frac{\Delta l}{2}}{\frac{l}{2} - \frac{\Delta d}{2}} = \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon_{\perp}} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \nu \varepsilon} \quad (17)$$

В силу условия $\beta \ll 1$ из известного тригонометрического соотношения

$$\operatorname{tg}(\alpha + \delta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \delta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \delta}$$

и соотношений для функций при малых аргументах (см. справочник-указатель, разложение часто встречающихся функций) следует

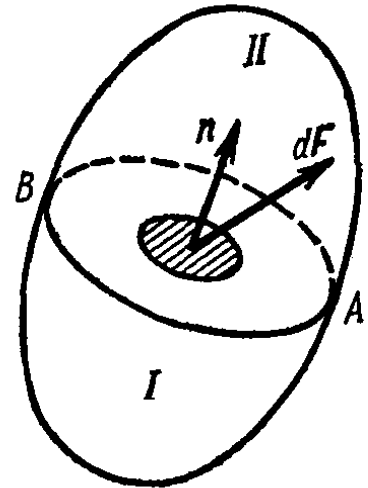


рис. 6

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\beta} = \frac{1 + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\beta} \approx \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \approx (1 + \beta)^2 \approx 1 + 2\beta \quad (18)$$

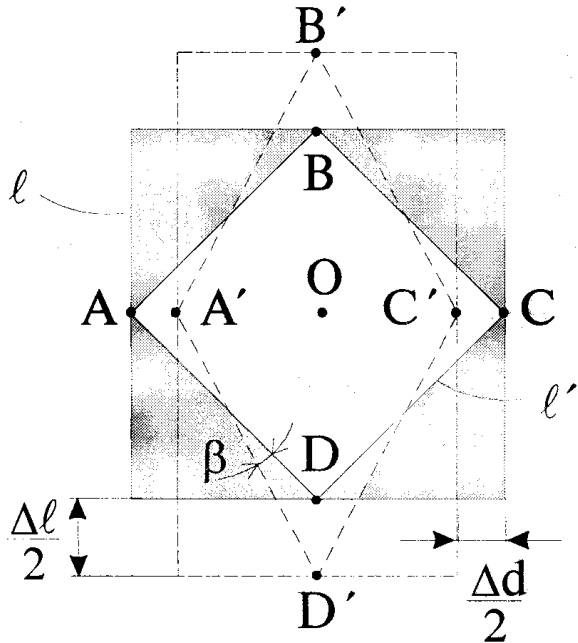


рис. 7

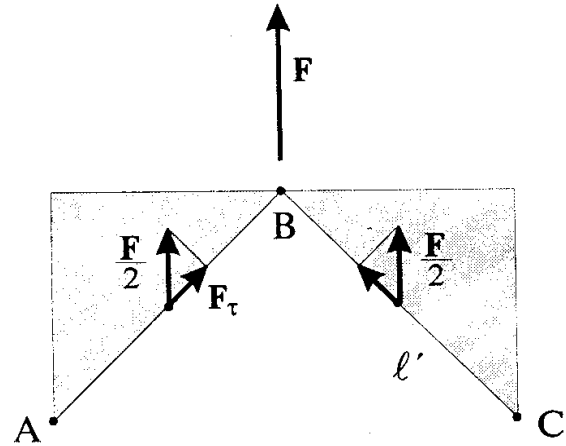


рис. 8

Сравнивая (17) и (18) получаем

$$\alpha = 2\beta = \frac{\varepsilon(1 + \nu)}{1 - \nu\varepsilon} \approx \varepsilon(1 + \nu) \quad (19)$$

Сила F , растягивающая кубик (рис. 8) создает нормальное напряжение $\sigma = F/l^2$. Это напряжение передается на грани AB и BC , при этом силы, действующие на каждую из граней, имеют не только нормальную, но и тангенциальную составляющую F_τ . Касательное напряжение при этом равно

$$\sigma_\tau = \frac{F_\tau}{l'l} = \frac{\frac{1}{2}\sigma l^2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{l'l} = \frac{\sigma}{2} \quad (20)$$

Учитывая (7) и (20) из (19) получаем

$$\alpha = \frac{2(1 + \nu)}{E} \sigma_\tau$$

Из сравнения с (14) учитывая, что при малых α ($\alpha \ll 1$) справедливо $\gamma = \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ (см. справочник-указатель, разложение часто встречающихся функций) получаем связь модулей сдвига и Юнга

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (21)$$

3. Тепловое расширение твердых тел

Тепловое расширение твердых тел можно продемонстрировать на простейших опытах. Возьмем шарик с хорошо подогнанным к нему кольцом. При нагреве шарика (или охлаждении кольца) он перестает проходить через кольцо. Нагрев металлического провода приводит к его удлинению. Чем длиннее провод, тем заметнее его удлинение. Зимой телеграфные провода провисают заметно меньше по сравнению с провисанием летом.

Если каким-либо образом запретить телу менять свои размеры, то при изменении температуры в нем возникают огромные напряжения. Известны случаи, когда части железных мостов, склепанные днем, разрушались ночью при охлаждении, срывая заклепки. Необходимо принимать меры, чтобы тела могли свободно расширяться или сжиматься при изменении температуры. Именно поэтому нельзя, например, туго натягивать телеграфные провода между столбами. Линии передачи тепла периодически изгибают в виде петель. Рельсы не кладут встык, между ними обязательно имеются небольшие промежутки.

Если конструкция выполняется из разнородных материалов, то их следует подбирать так, чтобы их размеры при изменении температуры менялись одинаково, иначе отдельные элементы будут сильно изгибаться (коробиться), особенно при больших размерах, что быстро приведет к ее разрушению. Именно поэтому широкое распространение получил, например, *железобетон* – затвердевший бетонный раствор, залитый в стальную решетку – арматуру (железо и бетон расширяются одинаково при нагревании).

Линейное тепловое расширение. Изменение линейных размеров тел пропорционально изменению температуры, если эти изменения невелики

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \beta \Delta t \quad (22)$$

Коэффициент пропорциональности β называется *тепловым коэффициентом линейного расширения*. Вещества с малым коэффициентом линейного расширения (например, сплав инвара) используют для изготовления точных инструментов.

Объемное тепловое расширение. Изменение линейных размеров тел сопровождается изменением их объема

$$\frac{\Delta V}{V} = \alpha \Delta t \quad (23)$$

Коэффициент пропорциональности α называется *тепловым коэффициентом объемного расширения*. Если тело свободно расширяется, то изменение его линейных размеров одинаково

$$\varepsilon_a = \varepsilon_b = \varepsilon_c$$

и из (3) получаем, что

$$V_1 = V(1 + \varepsilon_a)(1 + \varepsilon_b)(1 + \varepsilon_c) \approx V(1 + 3\varepsilon)$$

Следовательно, из (22), (23) получаем, что

$$\alpha \approx 3\beta$$

(24)

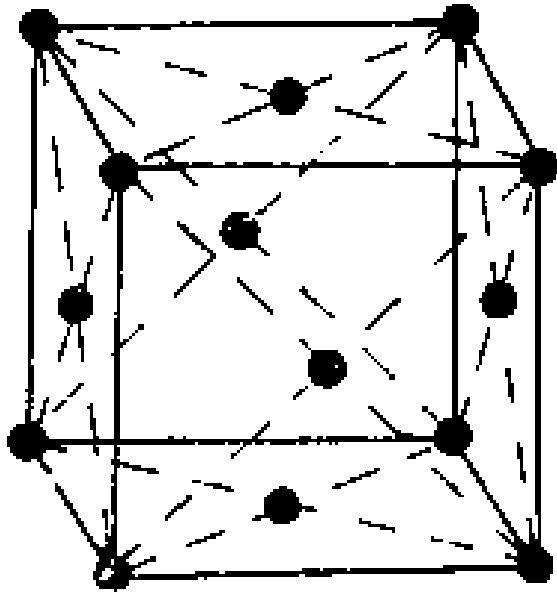
Тепловому объемному расширению подвержены также жидкости. Поскольку они не сохраняют своей формы, то линейное тепловое расширение к ним не применимо. Коэффициенты объемного расширения жидкостей обычно существенно (в десятки-сотни раз) превышают коэффициенты объемного расширения твердых тел.

Отметим в этой связи особенность воды. При нагревании от 0 до 4 °С ее объем не увеличивается, а уменьшается. Данное обстоятельство препятствует вымерзанию глубоких водоемов. При охлаждении ниже 4 °С верхние холодные слои водоемов перестают опускаться на дно и остаются на поверхности. В результате чего даже при очень низких температурах воздуха, температура воды в глубоких водоемах остается равной примерно 4 °С.

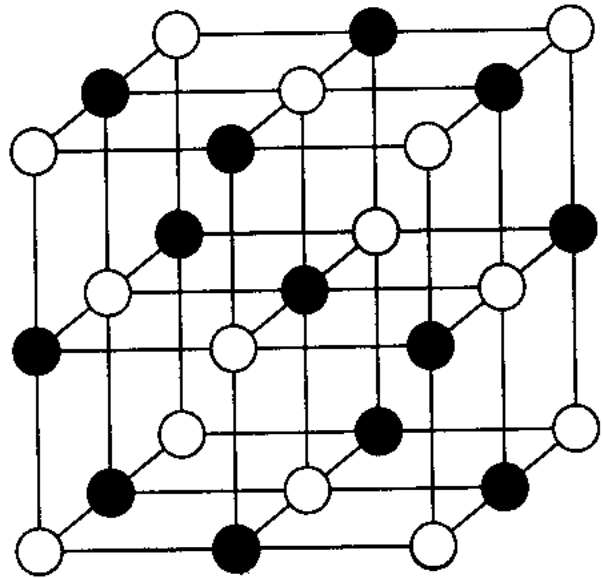
Термометры. Изменение объема жидкостей при их нагревании (охлаждении) нашло широкое применение в термометрах (*градусниках*). Резервуар с жидкостью соединяется с капиллярной трубкой, которая в свою очередь жестко фиксируется на твердой основе с нанесенной шкалой. Эта шкала по положению уровня жидкости в капилляре позволяет непосредственно получать значение температуры (см. рис. т3.16).

Приложение 1

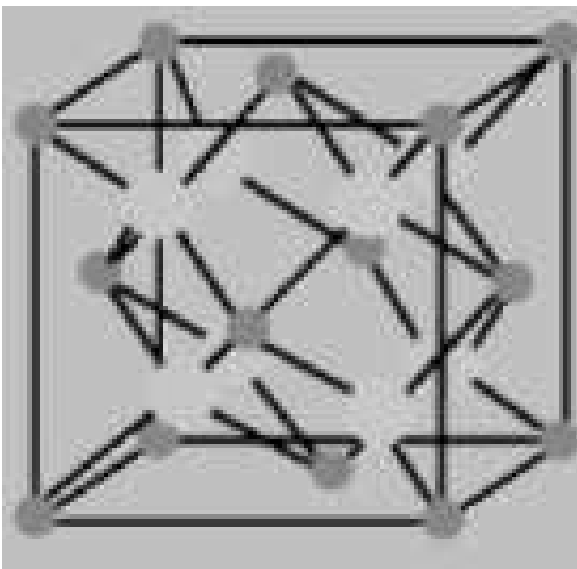
Примеры кристаллических решеток



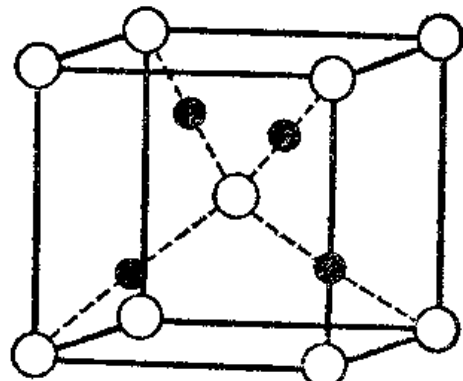
медь (Cu)



каменная соль (NaCl)

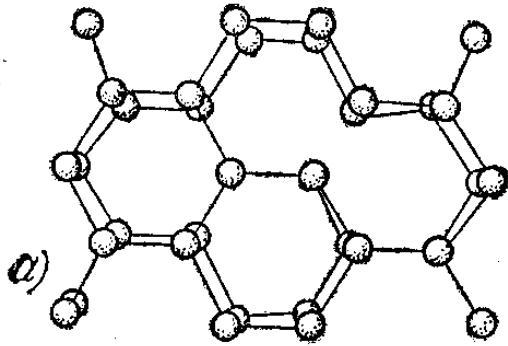


CaF₂

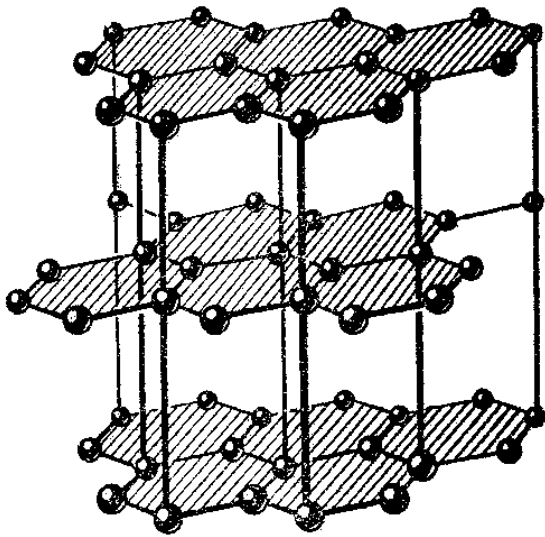
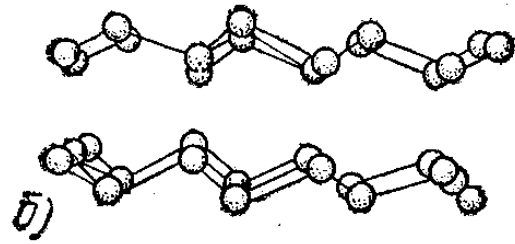


● Cu ○ O

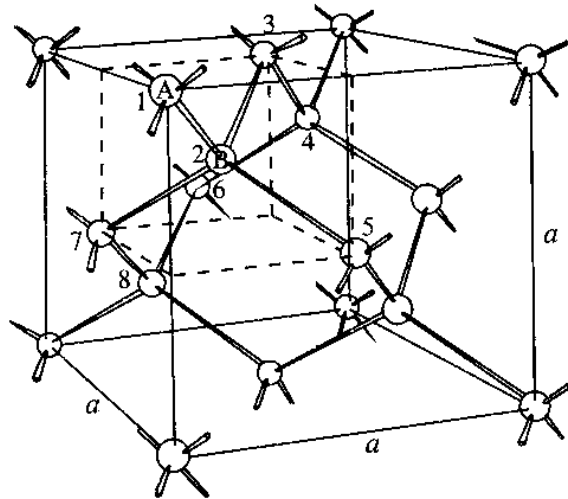
CuO



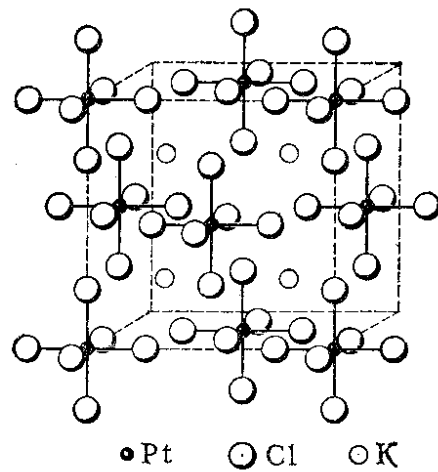
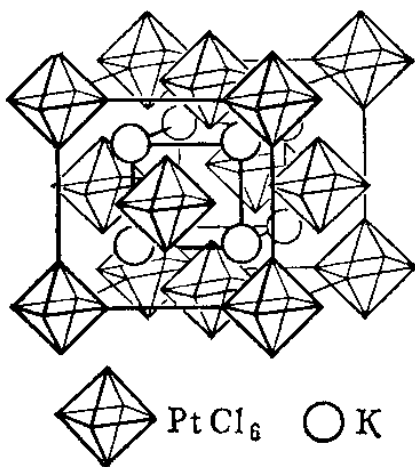
лед (H₂O)



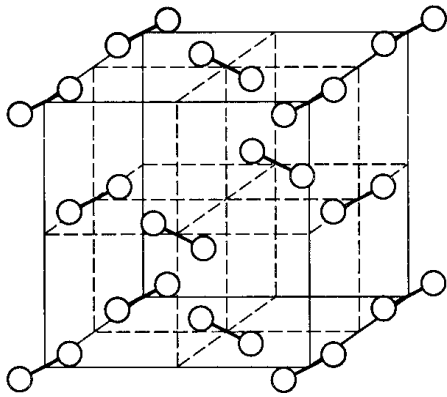
графит



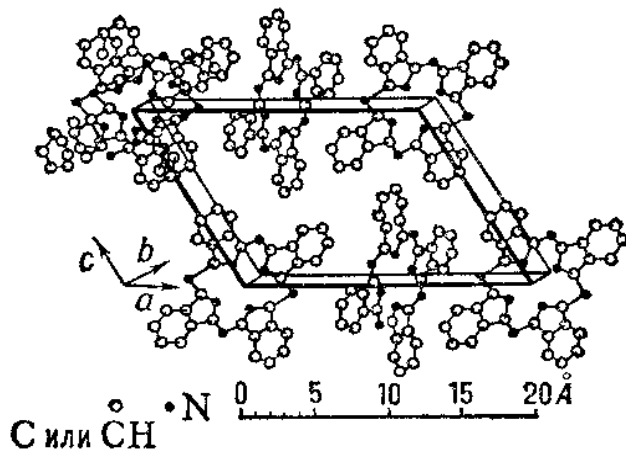
алмаз



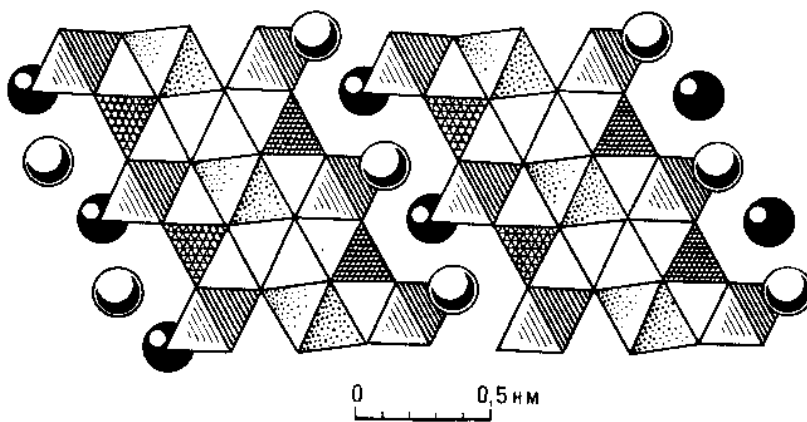
KPtCl₆



I₂

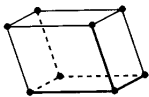
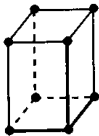
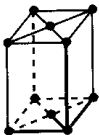
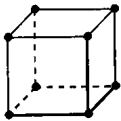
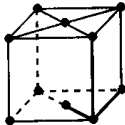
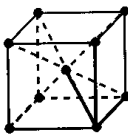
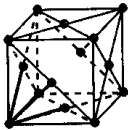
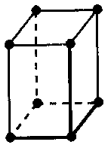


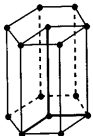
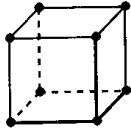
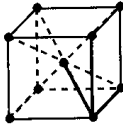
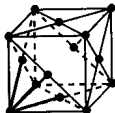


фталоцианин



бафертисит (BaFe₂Ti (Si₂O₇)O(OH))

Приложение 2 Решетки Браве

Тип р.Браве → Сингония ↓	Примитивная	Базоцентри- рованная	Объемноцен- трированная	Гранецентри- рованная
Триклинная				
Моноклинная				
Ромбическая				
Тетрагональ- ная				
Тригональная Ромбоэдри- ческая				
Гексагональ- ная				
Кубическая				

Примеры решения задач

1. К проволоке был подвешен груз. Затем проволоку согнули пополам и подвесили тот же груз. Сравнить абсолютное и относительное удлинения проволоки в обоих случаях.

$$\text{Ответ: } \frac{\Delta l_1}{l_1} = 2 \frac{\Delta l_2}{l_2}, \quad \Delta l_1 = 4\Delta l_2.$$

Решение. Жесткость материала определяется выражением (тт6). Если мы сгибаем проволоку пополам, то каждая из половинок имеет то же самое сечение и тот же модуль Юнга (материал, т.е. проволока, остался тем же). Длина каждой из половинок уменьшилась вдвое, поэтому жесткость половинки проволоки увеличилась в два раза

$$k' = E \frac{S}{l_2} = E \frac{S}{l_1/2} = 2E \frac{S}{l_1} = 2k_1$$

У нас имеются две половинки, следовательно, во втором случае жесткость двух половинок увеличилась в четыре раза по сравнению с жесткостью не согнутой проволоки

$$k_2 = 2k' = 4k_1$$

Поскольку жесткость увеличилась в 4 раза, то, в силу закона Гука (тт7), абсолютное удлинение уменьшилось также в 4 раза, т.к. в обоих случаях подвешен один и тот же груз

$$\Delta l_1 = 4\Delta l_2$$

Для относительного удлинения получаем

$$\frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{4\Delta l_2}{2l_2} = 2 \frac{\Delta l_2}{l_2}.$$

2. Толщина биметаллической пластинки, составленной из одинаковых полосок стали и цинка, равна $d = 0.1$ см. Определить радиус кривизны пластинки при повышении температуры на $\Delta t = 11$ °С. Коэффициент линейного расширения цинка $\alpha_1 = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$, а стали $\alpha_2 = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$.

$$\text{Ответ: } R = \frac{d}{(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t} = 7.0 \text{ м.}$$

Решение. Поскольку полоски имеют разные коэффициенты линейного расширения, то нагрев пластинки приведет к тому, что в полосках начнут возникать разные по направлению продольные напряжения. Это приведет к возникновению моментов сил, что, в свою очередь, приведет к изгибу пластинки. Поскольку концы полосок стали и цинка биметаллической пластинки должны совпадать, то при изгибе средние линии полосок должны опираться на один и тот же угол γ , получаем

$$L_1 = L + \Delta L_1 = L(1 + \epsilon_1) = \gamma(R + d/4)$$

$$L_2 = L + \Delta L_2 = L(1 + \epsilon_2) = \gamma(R - d/4)$$

где L – длина пластинки до нагрева, ε_1 – удлинение первой пластины, ε_2 – второй. Деля одно соотношение на другое, получаем

$$\frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2} = \frac{R + d/4}{R - d/4}$$

учет слагаемых первого порядка малости приводит к соотношению

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = d/(2R) \quad (1)$$

Относительное удлинение первой пластины, если бы она была предоставлена сама себе, составило бы $\alpha_1 \Delta t$, т.о. ее относительная деформация равна $\alpha_1 \Delta t - \varepsilon_1$, аналогично, относительная деформация второй пластины составит $\varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta t$, на длине dx пластины это приведет к ее закручиванию на угол $d\varphi$

$$d\varphi = \frac{\alpha_1 \Delta t - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta t}{d/2} dx$$

т.е. радиус закручивания образца составит

$$R = \frac{d/2}{\alpha_1 \Delta t - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta t}$$

что приводит к соотношению

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta t - d/(2R)$$

сравнивая данное соотношение с соотношением (1), получаем

$$R = \frac{d}{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta t} = 7.0 \text{ м.}$$

3. Определить относительное изменение объема полого латунного шара радиуса $R = 5$ см, в который накачан воздух до давления 11 атм. Наружное давление равно 1 атм. Толщина сферической оболочки $d = 1$ мм. Модуль Юнга латуни $E = 10^{12}$ дин/см², коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$.

Ответ: $\frac{\Delta V}{V} = \frac{3(1-\nu)R}{2Ed} \Delta P \approx 5.3 \cdot 10^{-4}$.

Решение. В силу симметрии касательное напряжение τ , действующее в оболочке, одно и то же во всех направлениях. Возьмем малый элемент оболочки, имеющий вид квадрата. Система (тт10), поскольку у нас теперь имеется не равномерное растяжение вдоль трех сторон, а растяжение вдоль двух сторон перейдет в систему

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \varepsilon_2 = \frac{\sigma_1 - \nu \sigma_2}{E} \quad (1)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \varepsilon_1 = \frac{\sigma_2 - \nu \sigma_1}{E} \quad (2)$$

Уравнение (тт12) перейдет в уравнение

$$\frac{\Delta S}{S} = 2\varepsilon \quad (3)$$

Уравнение (тт11) перейдет согласно (1), (2) и тому, что $\sigma_1 = \sigma_2$, в уравнение

$$\varepsilon = \frac{\tau(1-\nu)}{E}$$

Подставляя это соотношение в (3) получаем

$$\frac{\Delta S}{S} = 2(1-\nu) \frac{\tau}{E}$$

В этом выводе мы пренебрегли изменением площади, вызванным нормальным давлением. Так как $S \propto V^{2/3}$, то

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2} \frac{\Delta S}{S}$$

Искавленная поверхность оболочки создаст разность нормальных давлений $2\tau d/R$ (п5), которая должна уравниваться разностью давлений газа ΔP .

Окончательно получаем

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2} \frac{(1-\nu)R}{Ed} \Delta P \approx 5.3 \cdot 10^{-4}.$$

4. Между двумя стенками помещен стержень сечения S , состоящий из двух частей одинаковой длины $l/2$, имеющих коэффициенты линейного расширения α_1 и α_2 , модули Юнга E_1 и E_2 . При температуре T_1 торцы стержня лишь касаются стенок. С какой силой F стержень будет давить на стенки, если стержень нагреть до температуры T_2 ? Деформацией стенок пренебречь. На какое расстояние ΔL сместится место стыка частей стержня?

Ответ: $F = S \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} (\alpha_1 + \alpha_2) \Delta T$, $\Delta L = \frac{l}{2} \frac{\alpha_1 E_1 - \alpha_2 E_2}{E_1 + E_2} (T_2 - T_1)$.

Решение. Если бы каждая из половин стержня расширялась бы под действием нагрева беспрепятственно, то длина 1-ой и 2-ой частей стала бы рваной

$$l_1 = (l/2)(1 + \alpha_1(T_2 - T_1))$$

$$l_2 = (l/2)(1 + \alpha_2(T_2 - T_1))$$

Реально же из-за того, что стержни упрутся в стенки, 1-ая часть удлинилась на ΔL , а 2-ая укоротилась на такую же величину (выбор 1 и 2 произволен).

Изменение длины первой части стало равной

$$\Delta l_1 = l/2 + \Delta L - l_1 \tag{1}$$

второй –

$$\Delta l_2 = l/2 - \Delta L - l_2 \tag{2}$$

Поскольку силы в любом из сечений стержня равны имеем

$$\frac{E_1 S \Delta l_1}{l/2} = \frac{E_2 S \Delta l_2}{l/2} \tag{3}$$

Из соотношений (1)-(3) получаем соотношение для ΔL

$$\Delta L = \frac{l}{2} \frac{\alpha_1 E_1 - \alpha_2 E_2}{E_1 + E_2} (T_2 - T_1)$$

С учетом данного соотношения из (3), (1), (2) получаем выражение для F

$$F = \frac{E_1 S \Delta l_1}{l/2} = \frac{E_2 S \Delta l_2}{l/2} = S \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} (\alpha_1 + \alpha_2) \Delta T.$$

5. Оценить время упругого удара стержня, налетающего торцом на неподвижную недеформируемую стенку. Модуль Юнга материала стержня E , плотность ρ , длина стержня l .

Ответ: $\tau = 2l\sqrt{\rho/E}$.

Решение. В момент соприкосновения стержня со стенкой скорости частиц торца обращаются в нуль. Стержень в данный момент времени обладает кинетической энергией. В последующие моменты времени начинают останавливаться частицы соседних сечений. Пусть c – скорость волны деформации стержня. Тогда к моменту времени t остановятся все частицы, находящиеся от стенки на расстоянии ct . Таким образом, все частицы стержня остановятся в момент времени, равный l/c . В этот момент времени кинетическая энергия стержня равна нулю, вся его энергия представляет собой потенциальную энергию упругой деформации.

После этого стержень начинает переходить в недеформированное состояние. Этот процесс начинается со свободного конца стержня и постепенно приближается к преграде. Скорость приближения представляет собой ту же скорость волны деформации стержня. Таким образом, длительность упругого столкновения равна

$$\tau = 2l/c \quad (1)$$

Перейдем к нахождению c . Итак (см. выше), в некоторый момент времени t остановятся все частицы, находящиеся от стенки на расстоянии ct . В этот момент времени длина деформированной части стержня равна ct . Недеформированная часть стержня движется со скоростью v , следовательно, деформированная часть стержня укоротилась на величину

$$\Delta L(t) = vt \quad (2)$$

Согласно закону Гука (т7) имеем

$$\frac{F}{S} = \sigma = E\varepsilon = E \frac{vt}{ct} = E \frac{v}{c} \quad (3)$$

где S – площадь поперечного сечения стержня. Для нахождения силы применим второй закон Ньютона. До контакта со стенкой деформированная часть стержня имела импульс $\rho Vv = \rho Sctv$, после контакта импульс равен нулю, следовательно, за время t он изменился в результате действия силы

$$\rho Sctv = Ft \quad (4)$$

где V – объем деформированной части стержня. Подставляя данное выражение для силы в (3) получаем

$$c = \sqrt{E/\rho} \quad (5)$$

что с учетом (1) приводит к ответу

$$\tau = 2l\sqrt{\rho/E}.$$

Задачу можно решить, применяя закон сохранения энергии. Кинетическая энергия стержня в момент времени $\tau/2 = l/c$ переходит в потенциальную энергию деформации стержня, следовательно

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{k(\Delta l)^2}{2} \quad (6)$$

где m – масса, $k = ES/l$ – жесткость стержня (тт6), $\Delta l = \Delta L(\tau/2) = v\tau/2$ – максимальная деформация стержня (см. (2)). Подставляя эти величины в (6) получаем

$$\frac{\rho S l v^2}{2} = \frac{ES}{2l} \left(v \frac{\tau}{2} \right)^2$$

откуда получаем для τ уже ранее полученный ответ.

Сделаем небольшое отступление. Когда данная задача имеет смысл? Когда удар можно считать упругим? Силу F можно найти, подставляя выражение (5) в (4)

$$F = S v \sqrt{\rho E} \quad (7)$$

При упругом ударе напряжение стержня F/S не должно превосходить его предел упругости σ_y . Например, для стали он составляет $4 \cdot 10^8$ Па, поэтому предельная скорость стального стержня, согласно (7), не должна превышать $v_{пр} \approx 10$ м/с. Отметим, что скорость волны деформации стали (скорость звука) составляет $c \approx 5000$ м/с, так что $v_{пр}/c \ll 1$.

6. Колонна представляет собой осесимметричное тело, радиус которого с высотой h , отсчитываемой от основания, меняется как $a2^{-h/b}$. Какую предельную силу F можно приложить в вертикальном направлении к колонне, чтобы изменение ее высоты не превышало $\Delta L = 3$ мм? Колонна изготовлена из легкого материала, влиянием собственной тяжести на ее деформацию можно пренебречь. Модуль Юнга материала, из которого изготовлена колонна $E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па, $a = 1$ м, $b = 1$ м, высота колонны $L = 3$ м.

$$\text{Ответ: } F = \frac{\pi E \Delta L a^2 \ln 2}{2^{2L/b-1} b} \approx 4.1 \cdot 10^7 \text{ Н.}$$

Решение. Разобьем колонну на N слоев, каждый толщиной

$$\Delta l_i = L/N$$

Чем больше N , тем меньше меняется напряжение внутри каждого из слоев

$$\sigma_i = F/S_i$$

В пределе $N \rightarrow \infty$ напряжение внутри каждого из слоев практически неизменно. Удлинение слоя i составляет согласно закону Гука (тт7)

$$\Delta h_i = \Delta l_i \varepsilon_i = \Delta l_i \sigma_i / E$$

Изменение высоты колонны составляет

Бойченко А.М.

24

Твердые тела

$$\Delta L = \sum_{i=1}^N \Delta h_i = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta l_i \sigma_i}{E} = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta l_i F}{ES_i} = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta l_i F}{\pi E a^2 2^{-2l_i/b}} = \frac{LF}{\pi E N a^2} \sum_{i=1}^N 2^{2l_i/b} \quad (1)$$

Под знаком суммы стоят члены геометрической прогрессии со знаменателем

$$\gamma = 2^{\frac{2L}{Nb}}$$

Сумма членов геометрической прогрессии составляет

$$\sum_{i=1}^N 2^{2l_i/b} = \sum_{i=1}^N \gamma^i = \frac{\gamma^{N+1} - 1}{\gamma - 1} = \frac{2^{\frac{2L(N+1)}{Nb}} - 1}{2^{\frac{2L}{Nb}} - 1} = \frac{2^{\frac{2L}{b}} - 2^{-\frac{2L}{Nb}}}{1 - 2^{-\frac{2L}{Nb}}}$$

Знаменатель правой части с учетом разложения $2^{-x} \approx 1 - x \ln 2$ (см. справочник-указатель, разложение часто встречающихся функций), справедливого при малых x , равен

$$\sum_{i=1}^N 2^{2l_i/b} \approx \frac{2^{2L/b}}{1 - \left(1 - \frac{2L \ln 2}{Nb}\right)} = \frac{Nb}{2L \ln 2} 2^{2L/b}$$

где в числителе средней дроби уже учтен переход к пределу $N \rightarrow \infty$. Подставляя данное выражение в (1) окончательно получаем

$$\Delta L = \frac{Fb}{\pi E a^2} \frac{2^{\frac{2L}{b}-1}}{\ln 2}$$

или

$$F = \frac{\pi E \Delta L a^2 \ln 2}{2^{2L/b-1} b} \approx 4.1 \cdot 10^7 \text{ Н.}$$