Тихонов В.Н.

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.

1. ВВЕДЕНИЕ.

Настоящее пособие предназначено для учащихся 10-11 классов, углубленно изучающих математику, и носит скорее теоретический, чем практический характер. В стандартных учебниках по математическому анализу, для школ, даются строгие определения предела, производной, интеграла, но без того фундамента, на основе которого строятся эти определения и доказываются основные теоремы математического анализа.

В настоящее время имеются прекрасные учебники, которые на уровне интуитивных понятий вводят в математический анализ. В них приводится множество красивых задач и остроумных примеров. В них учат, как решать простейшие задачи, но практически нет основ математического анализа. Конечно, имеются и классические учебники, но они трудны для первоначального чтения. В этой разработке, на основе классических учебников, автор постарался как можно доходчивее изложить основные понятия и теоремы математического анализа.

Автор выражает благодарность за стимулирующие обсуждения и остроумные дополнения Шамариной Е. и Никишинау М.

ПОНЯТИЕ О ПРОИЗВОДНОЙ И ИНТЕГРАЛЕ.

Математический анализ изучает свойства функций и их поведение. Для этого вводятся различные величины, ее характеризующие такие как максимумы, минимумы, скорость ее возрастания, площадь под графиком и так далее. Введем, например, величину, характеризующую скорость возрастания функции в точке А. Для этого проведем из точки А прямую в соседнюю точку В.

Величина угла α или его тригонометрическая функция будут приблизительно характеризовать крутизну кривой в точке А. Эта характеристика будет тем точнее, чем точка В ближе к точке А. Тригонометрическая функция, именуемая тангенсом угла α, наиболее просто зависит от приращений Δx и Δy, отношение которых и характеризует скорость изменения функции.

Предел отношения $\Delta y/\Delta x$, будем называть скоростью изменения функции или

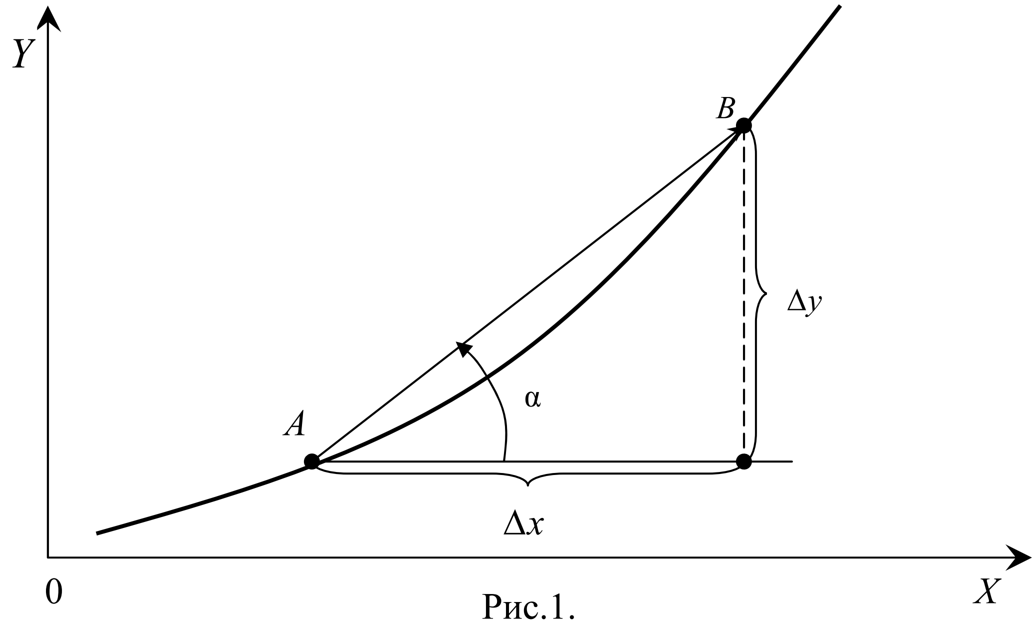


Рис.1.

производной функции.

Другая основная характеристика функции — это площадь под ее графиком, называемая в математическом анализе определенным интегралом. Основные идеи интегрального исчисления были выдвинуты Архимедом при вычислении площади сегмента параболы за две тысячи лет до создания интегрального исчисления. Первая идея заключается в том, что фигуры, вырезанные из листов бумаги одной и той же толщины, и имеющие одинаковый вес, имеют одинаковую площадь. Вторая идея Архимеда – это использование правила рычага. Пусть имеется сегмент параболы $y = ax^2$ с основанием L. Положим его на правую невесомую чашку весов с рычагом L. К левому рычагу длиной L прикрепим за катет длиной L прямоугольный треугольник, как показано на рисунке и приведем весы в равновесие путем изменения катета AC высотой H. Третья идея − это разрезание фигур на ленточки. Разрежем сегмент и треугольник на N прямоугольных ленточек шириной $\Delta x=L/N$. Ленточка n–ого сегмента имеет высоту ax_n^2, где $x_n = \frac{L}{N}n$ а ленточки треугольника имеет высоту h_n. Исходя из подобия треугольников ABO и треугольника с катетом x_n, имеем $h_n = \frac{H}{L}x_n$. Ленточки треугольника имеют рычаги длиной x_n, а ленточки сегмента − L. Запишем условие уравновешивания правых и левых n–ых ленточек $h_n \Delta x x_n = \frac{H}{L} x_n \Delta x x_n = a x_n^2 \Delta x L$, откуда $H = aL^2$ Тогда $S_\Delta = \frac{aL^3}{2}$. Отметим, что H не зависит от x_n, что не очевидно.

Далее Архимед заменил прямоугольный треугольник, подвешенный за катет, тем же треугольником, но подвешенным за центр тяжести и имеющем рычаг длиной $(2/3)L$ (центр тяжести треугольника находится в точке пересечения медиан После такой замены, используя правило рычага, имеем равенство $LS = \frac{2}{3} LS_\Delta = \frac{2}{3} L \frac{aL^3}{2} = \frac{1}{3} aL^4$. Откуда $S = \frac{1}{3} aL^3$.

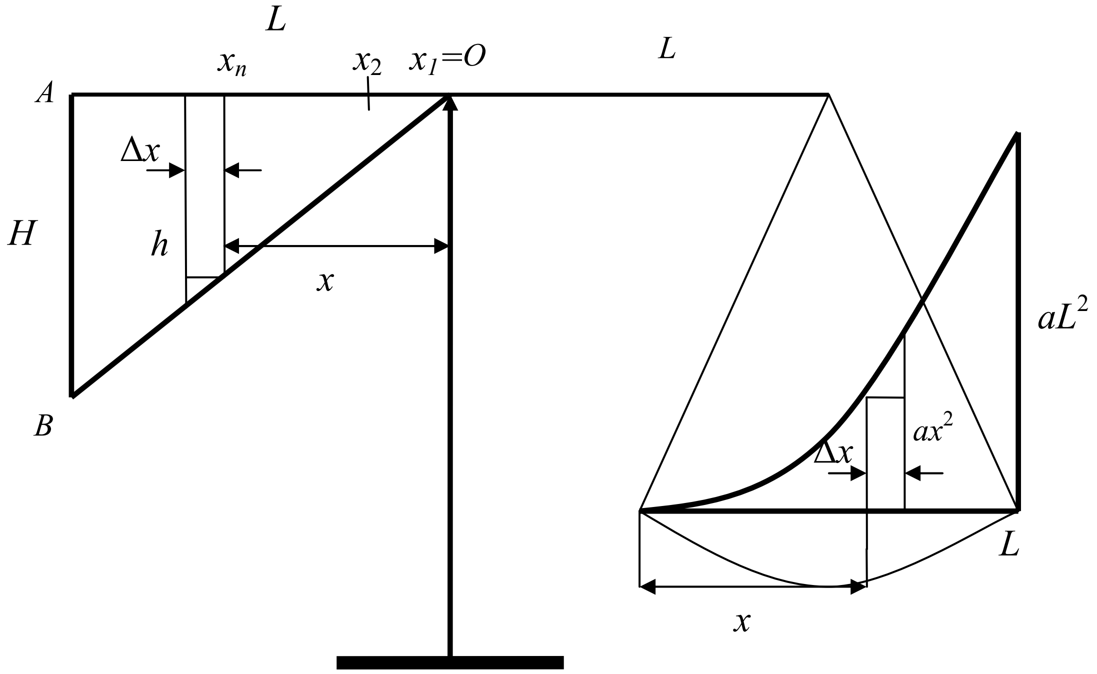


Рис 2.

Разовьем идею Архимеда разрезания на полоски. Для вычисления площади сегмента, разрежем сегмент на полоски и будем считать, что они бесконечно узкие:

Обозначим площадь сегмента как S, тогда:

$$S \approx \sum_{n=1}^{N} y_n \, \Delta x = \sum_{n=1}^{N} a {x_n}^2 \, \Delta x = \sum_{n=1}^{N} a \left(\frac{L}{N} n\right)^2 \frac{L}{N} = \sum_{n=1}^{N} \left(n \frac{L}{N}\right)^2 \left(\frac{aL^2}{L}\right)\left(\frac{L}{N}\right)$$

$$= \frac{aL^3}{N^3} \sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{aL^3}{N^3} \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

В результате получаем $S = \frac{1}{3} aL^3 \left(1 + \frac{1}{N}\right)\left(1 + \frac{1}{2N}\right) \to \frac{1}{3} aL^3$.

Следуя Архимеду, введем понятие площади, заключенной между графиком функции и осью абсцисс. Для этого разобьем отрезок $[a,b]$ на котором определена функция, на n частей и образуем следующую сумму: $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Эта сумма примерно равна искомой площади. Приближение будет тем точнее, чем меньше максимальное значение величины $(x_i - x_{i-1}) = \Delta x_i$ Предел этой суммы при $\Delta x_i \to 0$ называется определенным интегралом по Риману и обозначается как $\int_a^b f(x)dx$.

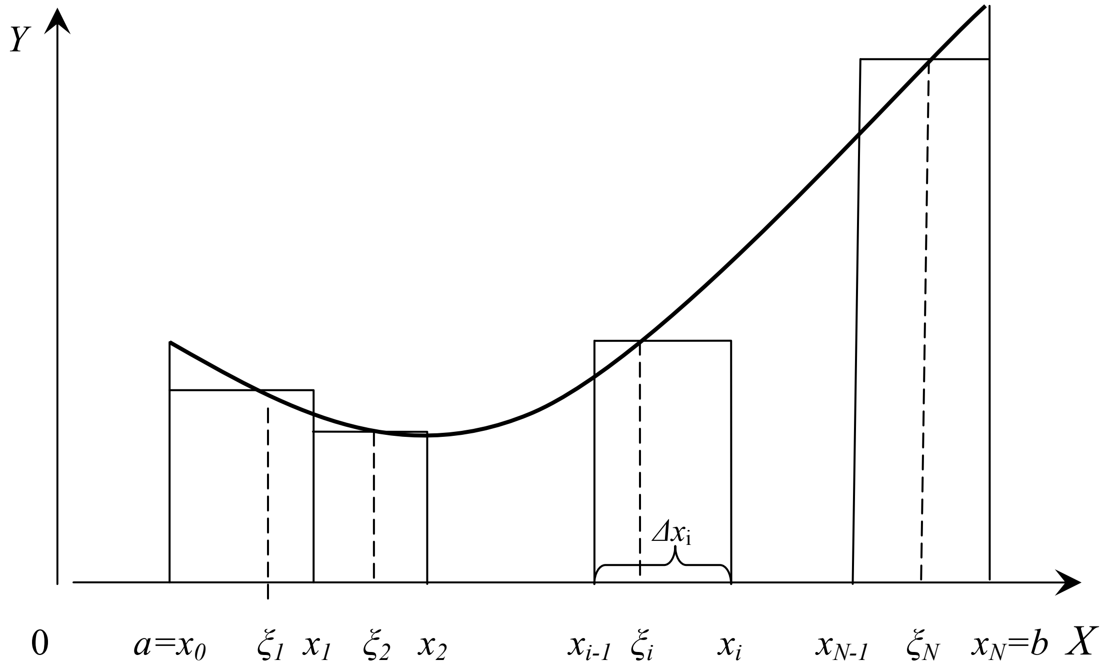


Рис.3.

Отметим, что если скорость возрастания функции можно охарактеризовать по-разному (например, синусом или синусом угла α), то такое определение площади очень естественно. Покажем, что эти величины, скорость и площадь, определенные выше, связаны очень простыми соотношениями.

Рассмотрим следующую функцию $F(x) = \int_a^x f(x)dx$, то есть, меняем положение правой границы отрезка, оставляя левую границу неподвижной.
Найдем производную этой функции $\frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$
На рисунке 4 $\Delta F(x)$ − это площадь заштрихованной области. Она примерно равна

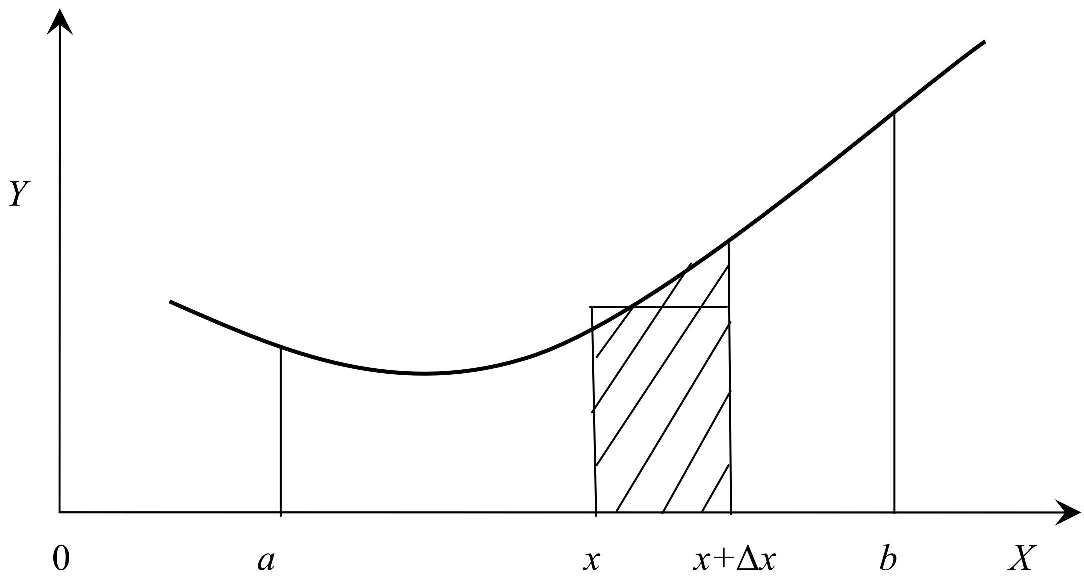


Рис.4.

$f(x)\Delta x$. Тогда $\frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)\Delta x}{\Delta x} = f(x)$. Функция $\Phi(x)$, производная от которой равна $f(x)$, называется первообразной $f(x)$. Очевидно, что первообразные отличаются друг от друга на постоянную, которую обозначим как C, то есть $F(x) = \int_a^x f(x)dx = \Phi(x) + C$. Тогда $F(a) = 0 = \int_a^a f(x)dx = \Phi(a) + C$. Следовательно, $C = -\Phi(a)$, а $F(x) = \int_a^x f(x)dx = \Phi(x) - \Phi(a)$. Эта формула называется формулой Ньютона-Лейбница.

Так как сами функции и то от чего они зависят, являются множествами чисел, то, конечно, нужно начинать с самих чисел и их свойств.

Замечание.

$$2^3 - 1 = (2-1)(2^2 + 2 + 1)$$
$$3^3 - 2^3 = (3-2)(3^2 + 3 \times 2 + 2^2)$$

……………………………………………………………………

$$(n+1)^3 - n^3 = \big((n+1) - n\big)((n+1)^2 + (n+1)n + n^2)$$

$$(n+1)^3 - 1 = n(n^2 + 3n + 2) = \sum_{i=1}^{n}(i+1)^2 + \sum_{i=1}^{n} i(i+1) + \sum_{i=1}^{n} i^2$$
$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 = n^3 + 3n^2 + 2n - 3\frac{n(n+1)}{2}$$

Окончательно:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$$

Чтобы последовательно ввести понятия непрерывной функции, понятие предела последовательности, предела функции, производной функции необходимо изучить свойства чисел, ибо на них, как на фундаменте, строятся все эти понятия.

Для чувств человека существуют только **натуральные числа** 1, 2, 3,… и т.д. и т.п. и даже ноль не является естественным числом, так как в природе нет пустоты. Основываясь на множестве этих чисел, можно ввести операции сложения, как добавление объектов и умножения, как последовательность ряда добавлений. Они обладают следующими основными свойствами:

1. Коммутативность сложения $n + m = m+n$.
2. Коммутативность умножения $n+m = m+n$.
3. Ассоциативность сложения $(n+m)+k=n+(m+k)$
4. Ассоциативность умножения $(nm)k=n(mk)$.
5. Дистрибутивность умножения $n(m+k)=nm+nk$ относительно сложения.

В области натуральных чисел можно ввести операцию вычитания $n- m$ как отнятия меньшего числа объектов от большего, что не выводит нас за рамки натуральных чисел. С другой стороны, можно подойти к определению слагаемого как к нахождению решения уравнения

$$n + m = x$$

относительно x. Решение находится с помощью таблицы сложения получаемой как добавление объектов. Так же можно подойти к определению операции вычитания

$m - y = n$, как к нахождению решения уравнения с помощью таблицы сложения

$$n + y = m$$

относительно y. Очевидно, что решение в области натуральных чисел существует только при условии $n<m$ и оно, если применить процедуру вычитания n к обеим частям уравнения как отнимания объектов, (на самом деле эта процедура является аксиомой) имеет вид $y = m–n$. Чтобы это уравнение всегда имело решение, а не только при $n<m$ введем понятие о нуле и отрицательных числах.

По определению, **ноль**, обозначаемый как 0, это такая величина, что $n+0=n$ и $n0=0$.

Отрицательные числа введем следующим образом: Возьмем множество натуральных чисел и пометим их каким-то символом, например. – Чтобы отличать этот символ от символа, означающего операцию вычитания –, он окрашен в красный цвет. Эти помеченные числа будем называть отрицательными числами. Определим свойства, которыми они обладают. Сначала определим, **что означает прибавить** к натуральному числу отрицательное число:

Если $\boldsymbol{n>m}$, то $n+(–m)=n-m$ и проблем нет – наш результат число натуральное.

Если $\boldsymbol{n = m}$**,** то результат 0.

Если $\boldsymbol{n<m}$, то результат будем считать равным отрицательному числу $–(m–n)$. При этом положительное число $(m–n)$ будем называть **модулем** числа $–(m–n)$. Чтобы распространить понятие модуля и на натуральные числа, определим, что модуль натурального числа есть само это число, а модуль нуля есть ноль.

Это определение отрицательного числа имеет много следствий. В качестве примера докажем, что $k-(-x)=k+x$, где $(-x)$ – отрицательное число, а k и x натуральные числа. Рассмотрим число $d = k- (-x)$. Тогда, по определению операции вычитания, $(-x)$ является решением уравнения $k=d+(-x)$.

1) Пусть $d>x$, тогда, из определения отрицательного числа следует $k=d+(-x)=d-x$. Добавим к обеим частям равенства x. Получим $k+x=d -x+x =d$ (мы вычли из d x элементов, а затем добавили их), то есть $d=k+x$.

2) Пусть $d<x$, тогда, из определения отрицательного числа $k=d+(-x)=-(x-d)$. Добавим к равенству $x=x$ это равенство. Получим $x+k=k+x=x+(-(x-d))=$
$=\{$т. к. $x>d$ то $x-d>0$, а $x>x-d$, то$\}=x-(x-d)=(x-x)+d=d$, то есть $d=k+x$.
Что и требовалось доказать. (Сразу добавить x нельзя, т. к. тогда надо доказать, что $x+(-x)=0$. Докажем это. Добавим к правой и левой части равенства x получим $x+(x+(-x))=x$. Тогда из определения нуля $x+0=x$ следует $x+(-x)=0$).
Этим примером автор хотел показать, что все, даже самые очевидные и привычные утверждения требуют доказательства.
Из школьного курса известно, что числам ставятся в соответствие точки на прямой. Для этого на прямой выбираем точку, которой ставим в соответствие ноль. Выбираем единичный отрезок и, откладывая его в одном определенном направление, получаем точки, которым ставим в соответствие натуральные числа. Откладывая единичные отрезки в другую сторону, получаем точки, соответствующие отрицательным числам.

Поставим в соответствие **рациональному** числу $\frac{n}{m}$ точку на введенной нами ранее прямой (**n и m – целые числа**). Для этого проведем через начальную точку, под углом друг к другу, две прямые α и β. Затем отложим на прямой αm отрезков одинаковой длины, а на прямой β – единичный отрезок, начиная с точки пересечения прямых. Проведем через конечные точки прямую γ. Затем, через точки прямой α, проведем прямые, параллельные прямой γ. По теореме Фалеса на прямой α получим m отрезков длиной $1/m$. Отложим этот отрезок на прямой в соответствующую сторону n раз. В результате получим отрезок длиной $\frac{n}{m}$.

Вот свойства рациональных чисел, которые следуют из свойств целых чисел:

1. Два числа могут быть связаны только одним из соотношений: <, >, или = (определяются правила по которым эти соотношения реализуются).
2. Существуют правила, с помощью которых определяется сложение двух чисел $a+b$.
3. Существуют правила, с помощью которых определяется умножение двух чисел ab.
4. Из $a>b$, $b>c$ следует $a>c$, а из $a=b$, $b=c$ следует $a=c$.
5. $a+b=b+a$.
6. $(a+b)+c=a+(b+c)$
7. Существует число 0, такое, что $a+0=a$.
8. Для любого числа a существует a', такое, что $a+a'=0$.

9. $ab=ba$.
10. $(ab)c=a(bc)$
11. Существует число 1 такое, что $a1=a$.
12. Для любого числа a существует a'', такое, что $aa''=1$.
13. $(a+b)c=ac+bc$
14. Из $a>b$ следует $a+c>b+c$.
15. Из $a>b$ и $c>0$ следует $ac>bc$.
16. Аксиома Архимеда: к любому числу можно добавить конечное число единиц, так, что сумма станет больше любого наперед заданного числа. Или – на любом отрезке можно отложить конечное число отрезков так, что общая их длина будет больше длины исходного отрезка.

Если каждому рациональному числу можно поставить в соответствие точку на прямой, то обратное утверждение не справедливо. Для этого достаточно привести хотя бы один пример. Построим его.

Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами, равными единице. Тогда из теоремы Пифагора следует, что длина гипотенузы x удовлетворяет уравнению $x^2=2$. Пусть x рациональное число, то есть представимо в виде $\frac{n}{m}$ – несократимая дробь. Тогда получим уравнение $n^2=2m^2$. Следовательно, n^2 четное число, а, следовательно, и n четное число. А раз так, то $n=2k$, гдеk– какое-то натуральное число. Тогда $2k^2=m^2$ и, следовательно, m тоже четное число. Значит дробь $\frac{n}{m}$ – сократима. Мы пришли к противоречию, что означает ложность исходного утверждения. Попутно мы доказали следующую теорему: уравнение $x^2 = 2$ не имеет решений в области рациональных чисел. Для того, чтобы оно имело решения, введем понятие вещественного (действительного) числа.

Вещественные (действительные) числа.

Определим **вещественные (действительные)** числа, как числа представимые бесконечными десятичными дробями. Эти числа удовлетворяют всем перечисленным выше аксиомам. Покажем, что любому отрезку соответствует единственное действительное число. Для этого определим следующую процедуру. Отложим на нашем отрезке единичный отрезок столько раз, сколько он укладывается на нем целиком. Это возможно, согласно аксиоме Архимеда. При этом останется какой-то отрезок. Это будет целая часть числа. Затем возьмем 1/10 часть единичного отрезка и отложим ого на оставшемся отрезке. Это будет число десятых. Эту процедура может не иметь конца, но она ставит в соответствие отрезку единственное число (что можно доказать от противного). Если отложить на прямой число единичных отрезков, равное целой части действительного числа, затем 1/10 часть единичного отрезка отложить столько раз равное десятичной части числа и т. д., то получим отрезок, длина которого однозначно соответствует данному действительному числу.

Упорядочивание действительных чисел.

Пусть имеется два действительных положительных числа $a=a_0,a_1a_2a_3\ldots$ и $b=b_0,b_1b_2b_3\ldots$ Если $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, …. $a_{n-1}= b_{n-1}$, $a_n\neq b_n$, то говорят, что $a>b$, если $a_n>b_n$, а если $a_n<b_n$, то $a<b$.

Теорема 1. Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$, где a, b и c -действительные числа.

Если выполнены условия теоремы, то возможны следующие случаи

1)

$$\begin{array}{lllllllllll}
a= & a_0, & a_1 & a_2 & \ldots & a_n & \ldots & a_k & \ldots & a_m & \ldots \\
\parallel & \parallel & \parallel & \parallel & ..\parallel.. & \parallel & ..\parallel.. & \vee & & & \\
b= & b_0, & b_1 & b_2 & \ldots & b_n & \ldots & b_k & \ldots & b_m & \ldots \\
\parallel & \parallel & \parallel & \parallel & ..\parallel.. & \parallel & ..\parallel.. & \vee & & & \\
c= & c_0, & c_1 & c_2 & \ldots & c_n & \ldots & c_k & \ldots & c_m & \ldots
\end{array}$$

2)

$$\begin{array}{lllllllllll}
a= & a_0, & a_1 & a_2 & \ldots & a_n & \ldots & a_k & \ldots.. & a_m & \ldots \\
\parallel & \parallel & \parallel & \parallel & ..\parallel.. & \parallel & ..\parallel.. & \vee & & & \\
b= & b_0, & b_1 & b_2 & \ldots & b_n & \ldots & b_k & \ldots & b_m & \ldots \\
\parallel & \parallel & \parallel & \parallel & ..\parallel.. & \vee & & & & & \\
c= & c_0, & c_1 & c_2 & \ldots & c_n & \ldots & c_k & \ldots.. & c_m & \ldots
\end{array}$$

3)

$$\begin{array}{lllllllllll}
a= & a_0, & a_1 & a_2 & \ldots & a_n & \ldots & a_k & \ldots & a_m & \ldots \\
\parallel & \parallel & \parallel & \parallel & & \parallel & ..\parallel.. & \vee & & & \\
b= & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_n & \ldots & b_k & \ldots & b_m & \ldots \\
\parallel & \parallel & \parallel & \parallel & & \parallel & ..\parallel.. & \parallel & ..\parallel.. & \vee & \\
c= & c_0, & c_1 & c_2 & \ldots & c_n & \ldots & c_k & \ldots & c_m & \ldots
\end{array}$$

Это означает, что 1) $a_k>b_k>c_k$ и, следовательно, $a_k>c_k$ и, следовательно, $a>c$ или 2) $a_n=b_n>c_n$, следовательно, $a_n>c_n$ и, следовательно, $a>c$ или 3) $a_k>b_k=c_k$, следовательно $a_k>c_k$ и, следовательно, $a>c$.

Теорема 2. Пусть

$$\begin{array}{llllllllll}
a= & a_0, & a_1 & a_2 & \ldots & a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \ldots & \ldots \\
b'= & b_0, & b_1 & b_2 & \ldots & b_n & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
b''= & b_0, & b_1 & b_2 & \ldots & b_n\text{-}1 & 9 & 9 & 9 & \ldots
\end{array}$$

и после любого a_n хоть одно $a_{n+i}\neq 9$ ($i>0$) (нет бесконечной последовательности девяток). Тогда если $a<b'$, то $a<b''$ и если $a<b''$, то $a<b'$ и наоборот: если $a>b'$, то $a>b''$ и если $a>b''$, то $a>b'$.

<u>Докажем</u>, что если $a<b'$, то $a<b''$.

a) Пусть $a_k<b_k$ и $k<n$ тогда очевидно $a<b''$.

b) Пусть $a_k<b_k$ и $k=n$ тогда возможны следующие варианты:

1) $a_n<b_n$-1 и следовательно $a<b''$,
2) $a_n=b_n-1$, тогда по условию теоремы найдется $a_{n+i}\neq 9$ ($i>0$), то есть $a_{n+i}<9$, что и будет означать что $a<b''$.

<u>Докажем</u>, что если, $a<b''$ то $a<b'$

a) Пусть $a_k<b_k$ и $k<n$ тогда очевидно $a<b'$.

b) Пусть $a_k<b_k$ и $k=n$, то есть $a_n<b_n$, *тогда* возможны следующие варианты:

1) $a_n<b_n-1$, тогда $a_n<b_n$ и, следовательно, $a<b'$,

2) $a_n=b_n-1$, тогда $a_n<b_n$ и, следовательно, $a<b'$.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Эта теорема говорит о том, что между числами b' *и* b'' **нельзя вставить никакого другого действительного числ**а, отличного от b' и b''. (Пусть это не так и такое число a есть. Тогда $b'>a>b''$. Из **теоремы 2** следует что $a>b'$, а это противоречит начальному условию). В результате этой теоремы мы можем ввести новое **определение равенства чисел**. Числа равны не только тогда, когда их написания совпадают, но и когда между ними нельзя вставить никакого другого числа. Такое новое определение не приводит ни к каким противоречиям. Это означает, что одно и тоже действительное число можно представить в двух разных видах, чего нельзя сказать о рациональных числах.

Теорема 3. Между любыми неравными действительными числами можно вставить рациональное число.

Доказательство. Пусть между числами a и b существует соотношение $a>b$ и эти числа не представляются в виде b''.

$$
\begin{array}{llllllll}
a = & a_0, & a_1 & a_2 & \dots & a_n & \dots & a_{n+k} \ \dots \\
 & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & & \vee & & \\
b' = & b_0, & b_1 & b_2 & \dots & b_n & \dots & b_{n+k} \ \dots
\end{array}
$$

Тогда найдутся $a_n>b_n$, и найдется число $b_{n+m}<9$. Добавив к b_{n+m} единицу, получим число c

$$
\begin{array}{llllllll}
c = & b_0, & b_1 & b_2 & \dots & b_n & \dots & b_{n+m}+1 \quad \dots
\end{array}
$$

такое что $a>c>b$.

Ограниченные множества чисел.

Определение 1. Множество чисел $\{x\}$ называется ограниченным сверху (снизу) если существует такое число M (m), что для любого $x \le M$ ($x \ge m$). Число M называется верхней гранью множества чисел $\{x\}$. (Число m называется нижней гранью множества чисел $\{x\}$).

Определение 2. Наименьшее из M (наибольшее из m) называется точной верхней (нижней) гранью и обозначается как $\overline{x} = \sup\{x\}$ ($\underline{x} = \inf\{x\}$).

Определение 3. $\overline{x}$ называется точной верхней ($\underline{x}$ – нижней) гранью, если:

1) $\bar{x} \ge x$ ($\underline{x} \le x$), где $x \in \{x\}$;

2) каково бы ни было $x' < \overline{x}$ $\left(x' > \underline{x}\right)$, найдется $x \in \{x\}$ такое, что $x > x'(x < x')$.

На будущее: другими словами − точной верхней (нижней) гранью для какого-либо множества называется число большее (меньшее) любого члена множества, в левой (правой) ε окрестности которого всегда найдется хоть один член нашего множества. Проще говоря, между множеством и его точной верхний и нижней гранями нет «щели».

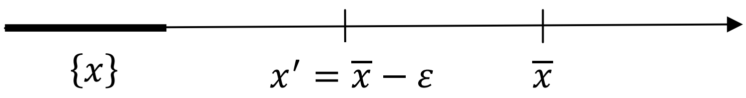


Рис. 5а.

Теорема 4. Определения **2** и **3** равносильны.

Доказательство.

1) Из определения **2** следует определение **3**

Докажем от противного. Пусть выполнено условие определения **2**, то есть $\overline{x}$ есть наименьшее число из чисел больших $x \in \{x\}$, и не выполняется условие определения **3** то есть найдется число $x' < \overline{x}$ такое, что не найдется $x \in \{x\}$ такое, что $x > x'$ (между x' и $\overline{x}$ есть щель не содержащая членов нашего множества $\{x\}$), а это значит что x' есть новая верхняя грань меньшая $\{x\}$, чего по определению $\{x\}$ быть не может.

2) Из определения **3** следует определение **2**.

Докажем от противного. Пусть $\overline{\overline{x}}$ удовлетворяет определению **3** но при этом не является наименьшей верхней гранью по определению **2**. Это значит, что есть верхняя грань по определению **2** $\overline{\overline{\overline{x}}} < \overline{\overline{x}}$. Выберем x', такое, что $\overline{\overline{\overline{x}}} < x' < \overline{\overline{x}}$, тогда в силу определения **3** найдется $x \in \{x\}$, такое что $\overline{\overline{\overline{x}}} < x' < x < \overline{\overline{x}}$. То есть $\overline{\overline{\overline{x}}}$ не является верхней гранью. Мы получили противоречие. Значит утверждение, что $\overline{\overline{x}}$ не наименьшая верхняя грань ложно.

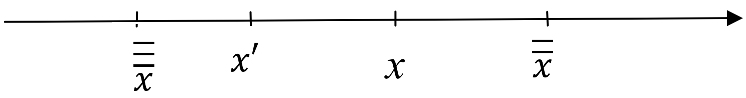


Рис. 5б.

Теорема 5. Если множество действительных чисел $\{x\}$ ограничено сверху (снизу) и содержит хотя бы один элемент, то у этого множества существует точная верхняя (нижняя) грань.

Доказательство. Не теряя общности, предположим, что x>0. Так как множество ограничено, то у целых частей его чисел существует максимальная целая часть. Обозначим ее $\overline{x_0}$. Отберем все числа этого множества имеющие целые части равные $\overline{x_0}$. У этих чисел выберем максимальную десятую часть и обозначим ее $\overline{x_1}$. Отберем все числа, имеющие целые части равные $\overline{x_0}$, а десятые части $\overline{x_1}$. Среди них найдем максимальное значение сотой части и обозначим его $\overline{x_2}$. Используя этот алгоритм, мы построим некоторое число и обозначим его $\overline{x}$. Это и будет точная верхняя грань множества $\{x\}$. Докажем это. Пусть x' такое что $x' < \overline{x}$. Это значит, что перебирая дробные части числа x' (целую, десятую, сотую, и т. д.) мы дойдем до $x'_n < \overline{x_n}$. А это в свою очередь значит, что в множестве $\{x\}$ есть число x с $x_n > x'_n$ и совпадающими предыдущими разрядами. Следовательно $x > x'$. Тогда из **определения 3** следует что $\overline{x}$ − точная верхняя грань.

Приближение действительных чисел рациональными числами.

Приближение обычно заключается в обрыве записи бесконечной десятичной дроби (приближение с недостатком) или после обрыва дроби к последней цифре добавляется единица (приближение с избытком).

Теорема 6. Для любого действительного числа a и любого действительного числа $\varepsilon>0$ найдутся рациональные числа α_1 и α_2 такие что $\alpha_1 < a < \alpha_2$ и $\alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon$.

Доказательство. Выберем ε для $a = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \dots$ построим $\alpha_1 = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ и $\alpha_2 = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n + \frac{1}{10^n}$, тогда $\alpha_1 < a < \alpha_2$ и разница между α_1 и α_2 и a не больше $\frac{1}{10^n}$.

Теперь найдем n. Это такое число что $\varepsilon > \frac{1}{10^n}$ для ε. В силу аксиомы Архимеда всегда найдется $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно $\varepsilon > \frac{1}{n} > \frac{1}{10^n}$.

Теорема 7. Пусть x_1 и x_2 два действительных числа. Тогда, если для любого рационального числа $\varepsilon>0$ (сколь мало оно ни было) найдутся два рациональных числа γ_1 и γ_2 таких что $\gamma_2 - \gamma_1<\varepsilon$, $\gamma_1\le x_1\le\gamma_2$ и $\gamma_1\le x_2\le\gamma_2$ то $x_1=x_2$.

Доказательство. Пусть это не так и пусть $x_1<x_2$. Тогда в силу **теоремы 6** Найдутся два рациональных числа α_1 и α_2, такие, что $x_1<\alpha_1<\alpha_2<x_2$. Зафиксируем расстояние между ними ($\alpha_2-\alpha_1$=const). В силу условия нашей теоремы для любого рационального числа $\varepsilon>0$ (сколь мало оно ни было) найдутся два рациональных числа γ_1 и γ_2 таких что $\gamma_2-\gamma_1<\varepsilon$ и $\gamma_1\le x_1\le\gamma_2$, $\gamma_1\le x_2\le\gamma_2$, то есть $\gamma_1\le x_1<x_2\le\gamma_2$. С учетом $x_1<\alpha_1<\alpha_2<x_2$ имеем $\gamma_1\le x_1<\alpha_1<\alpha_2<x_2\le\gamma_2$. Из этой цепочки неравенств следует $\gamma_1<\alpha_1<\alpha_2<\gamma_2$. Первое неравенство дает $\gamma_1-\alpha_1<0$. Вычитая из правой и левой части неравенства $\alpha_2<\gamma_2$ величину γ_1 получим $\alpha_2-\gamma_1<\gamma_2-\gamma_1$. Складывая полученное неравенство и неравенство $\gamma_1-\alpha_1<0$ имеем $\alpha_2-\alpha_1<\gamma_2-\gamma_1$ В свою очередь, учтя условие теоремы: $\gamma_2-\gamma_1<\varepsilon$, получим что $\alpha_2 - \alpha_1$=const$<\gamma_2 - \gamma_1<\varepsilon$ – сколь угодно малое число. Чего не может быть.

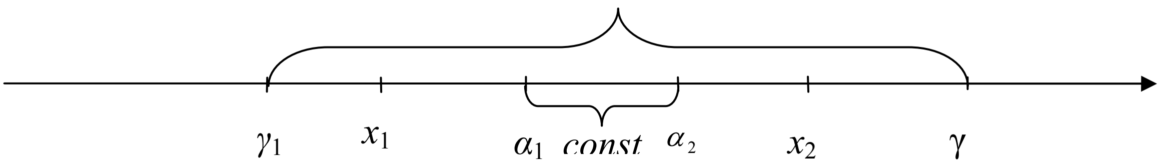


Рис. 6.

Сложение и умножение действительных чисел.

Определение 4. Суммой двух действительных чисел a и b называется такое число x которое для любых рациональных чисел α_1, α_2, β_1, β_2 удовлетворяющих соотношениям $\alpha_1\le a\le\alpha_2$ и $\beta_1\le b\le\beta_2$ удовлетворяют неравенству $\alpha_1+\beta_1\le x\le\alpha_2+\beta_2$.

Докажем, что такое число x существует и оно единственное.

Существование. Рассмотрим множество всех чисел α_1, α_2, β_1, β_2, удовлетворяющих условию **определения. 4.** Из $\alpha_1<a<\alpha_2$ и $\beta_1<b<\beta_2$ следует $\alpha_1<\alpha_2$ и $\beta_1<\beta_2$, а из этих неравенств следует $\alpha_1+\beta_1<\alpha_2+\beta_2$. Последнее неравенство означает, что множество чисел $\{\alpha_1+\beta_1\}$ ограничено сверху и, следовательно, в силу **теоремы 5** оно имеет точную верхнюю грань. Обозначим ее как x. Эта точная верхняя грань и есть сумма чисел a и b.Докажем это. Неравенство $\alpha_1+\beta_1\le x$ следует из того, что x −

верхняя грань чисел $\{\alpha_1+\beta_1\}$. Неравенство $x\leq\alpha_2+\beta_2$ следует из **определения 2** точной верхней грани (точная верхняя грань — это наименьшая верхняя грань), а $\alpha_2+\beta_2$ и есть одна из верхних граней для множества чисел $\{\alpha_1+\beta_1\}$. Следовательно, $\alpha_1+\beta_1\leq x\leq\alpha_2+\beta_2$.

<u>Единственность</u>. Пусть существуют два числа x_1 и x_2, которое для любых рациональных чисел α_1, α_2, β_1, β_2 удовлетворяющих соотношению $\alpha_1<a<\alpha_2$ и $\beta_1<b<\beta_2$, а так же удовлетворяют неравенствам: $\alpha_1+\beta_1<x_1<\alpha_2+\beta_2$ и $\alpha_1+\beta_1<x_2<\alpha_2+\beta_2$. Выберем ε. Для $\varepsilon/2$ найдутся α_1, α_2, β_1, β_2 такие, что
$\alpha_2-\alpha_1<\varepsilon/2$, и $\beta_2-\beta_1<\varepsilon/2$ (это возможно в силу **теоремы 6**). Тогда $\alpha_2+\beta_2-(\alpha_1+\beta_1)=$
$\alpha_2-\alpha_1+\beta_2-\beta_1<\varepsilon/\ \varepsilon/2+2=\varepsilon$. Это означает, что числа x_1 и x_2 заключены между числами, разность между которыми меньше любого положительного числа. Тогда, согласно **теореме 7**, числа x_1 и x_2 равны.

Определение 5. Произведением двух действительных чисел a и b называется такое число x которое для любых чисел α_1, α_2, β_1, β_2 удовлетворяющих соотношению $\alpha_1<a<\alpha_2$ и $\beta_1<b<\beta_2$ удовлетворяет неравенству $\alpha_1\alpha_2<x<\beta_1\beta_2$.

Поступая аналогично тому, что мы делали в **определении суммы** можно доказать, что число x существует и оно единственное.

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ.

Последовательность и ее предел.

Определение 6. Если значению натурального числа ставится в соответствие действительное число, x_1, x_2,..,x_n, то говорят, что задана последовательность чисел $\{x_n\}$.

Если даны последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ то последовательность $\{x_n+y_n\}$ называется суммой последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, последовательность $\{x_ny_n\}$ называется произведением последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, последовательность $\{x_n/y_n\}$ называется делением последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, если $y_n \neq 0$.

Определение 7. Последовательность называется ограниченной сверху (снизу) если существует такое число M (m), что для любого $x_n \in \{x_n\}\ x_n\ \ M\ (x_n\ \ m)$
M называется верхней (m – нижней) гранью.

Определение 8. Последовательность называется ограниченной если она ограничена сверху и снизу.

Определение 9. Последовательность называется бесконечно большой если для любого $A>0$ найдется такое N, что для $n>N$ $|x_n|>A$ (N, конечно, зависит от A).

Неограниченная последовательность не обязательно является бесконечно большой. например 1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,1,2,3,4,5,……

Определение 10. Последовательность называется бесконечно малой если для любого $\varepsilon>0$ (сколь угодно малое оно бы ни было) найдется такое N, что для $n>N$ $|x_n|<\varepsilon$ (N, конечно, зависит от ε).

Определение 11. Последовательность не является бесконечно малой, если найдется такое $\varepsilon>0$, что для любого N (сколь угодно большого) найдется $n>N$ такое, что $|x_n|>\varepsilon$ (конечно, N зависит от ε).

Теорема 8. Сумма двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Выберем ε и потребуем $|x_n|<\varepsilon/2$, что начнется с N_1 и $|y_n|<\varepsilon/2$ что начнется с N_2.

Тогда $|x_n+y_n|<|\, x_n|+|y_n|<\varepsilon$ для $n>\max\{N_1,N_2\}$

Следовательно, разность двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 9. Произведение бесконечно малой последовательности $\{x\}$ на ограниченную последовательность $\{y\}$, есть бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Выберем ε и потребуем $|x_n| <A$ что выполняется, начиная с N_1 и $|y_n|<\varepsilon/A$ что будет выполнено начиная с N_2.

Тогда $|x_ny_n|<|a_n||y_n|<A\varepsilon/A=\varepsilon$ для $n>\max\{N_1,N_2\}$.

Теорема 10. Бесконечно малая последовательность ограничена.

Доказательство. Выберем ε, тогда начиная с $n>N$ $|x_n|<\varepsilon$. Выберем $A=\max\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\varepsilon\}$ тогда $|x_n|<A$.

Теорема 11. Если бесконечно малая последовательность $\{x_n\}$, то $\{1/x_n\}$ − бесконечно большая последовательность. Проведя действия в обратном порядке, докажем теорему:

Теорема 12. Если бесконечно большая последовательность $\{x_n\}$, то $\{1/x_n\}$ − бесконечно малая последовательность.

Сходящиеся последовательности.

Определение 12. Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует число a такое, что последовательность $\{x_n - a\}$ бесконечно малая последовательность.
По-другому: Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует число a такое, что для любого $\varepsilon>0$ (сколь угодно малое оно бы ни было) найдется такое N, что для $n>N$ $|x_n a|<\varepsilon$ (N зависит от ε). Число a называется пределом последовательности и обозначается как $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.
Теорема 13. Последовательность может иметь только один предел.
Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет пределы a и b. Тогда $\{x_n - a\}$ и $\{x_n - b\}$ – бесконечно малые последовательности, а разность бесконечно малых последовательностей, согласно **теореме 8** так же бесконечно малая последовательность, что означает что $\{(x_n - a) - (x_n - b)\} = \{a - b\} = 0$. Следовательно, $a - b = 0$.

Определение 13. Интервал $((a-\varepsilon),(a+\varepsilon))$ называется выколотой ε окрестностью точки a. Интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ называется ε окрестностью точки a.

Определение 14. Последовательность не являющейся сходящейся называется расходящейся.
Определение 15. Бесконечно большую последовательность иногда называют сходящейся к бесконечности.

Докажем, что последовательность $x_n = 0{,}3\underbrace{3\ldots.3}_{n}$ сходится к $1/3=0{,}333\ldots..$

Доказательство.
Выберем ε и для него найдем такое N, что для $n > N$ $\left|x_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$. Отметим, что

$$x_n = 0.\underbrace{33\ldots3}_{n} < \frac{1}{3} = 0.\underbrace{33\ldots3}_{n}\ldots < 0.\underbrace{33\ldots3}_{n} + \frac{1}{10^n}$$

вычтем из x_n из этих неравенств, получим

$$0 < \frac{1}{3} - 0.\underbrace{33\ldots3}_{n} = 0.\underbrace{33\ldots3}_{n}\ldots3\ldots - 0.\underbrace{33\ldots3}_{n} < \frac{1}{10^n} \text{ или } \left|\frac{1}{3} - x_n\right| < \frac{1}{10^n}.$$

Найдем такое n, что $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$ или $10^n>1/\varepsilon$, но $10^n= (1+9)^n = 1+9n+\ldots>9n>\frac{1}{\varepsilon}$.

Потребуем что бы выполнялось $9n > \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда $\frac{1}{10^n} < \frac{1}{9n} < \varepsilon$. Последнее неравенство запишем как $9n > \varepsilon$ оно заведомо выполняется начиная с $n > \left[\frac{1}{9\varepsilon}\right] + 1$.

Следовательно $N = \left[\frac{1}{9\varepsilon}\right] + 1$.

Теорема 14. Всяческая сходящаяся последовательность ограниченная.

Доказательство.

Так как последовательность сходится к a, то найдется N, такое, что для $n>N$ $|x_n - a| < \varepsilon$ или $\varepsilon - a < x_n < \varepsilon + a$. Тогда $|x_n|$ $\max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|, |x - \varepsilon, x+\varepsilon$.

Не всякая ограниченная последовательность сходится.

Теорема 15. Сумма сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходящаяся последовательность и ее предел равен сумме пределов последовательностей.

Доказательство.

Пусть a и b пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда $\{x_n - a\}$ и $\{y_n - b\}$ бесконечно малые последовательности. Следовательно $\{(x_n - a)+(y_n - b)\}=$ $=\{(x_n+y_n)-(a+b)\}$ бесконечно малая последовательность. Следовательно, $a+b$ ее предел.

Теорема 16. Произведение сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - сходящаяся последовательность и ее предел равен произведению пределов последовательностей.

Доказательство.

Пусть a и b пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда $\{x_n - a\}=\{\alpha_n\}$ и $\{y_n - b\}=\{\beta_n\}$ бесконечно малые последовательности $\{x_n y_n - ab\}=\{(a+\alpha_n)(b+\beta_n)-ab\}=\{\alpha_n\beta+\alpha_n a+\beta_n b+ab-ab\}=\{\alpha_n\beta_n+\alpha_n a+\beta_n b\}$ бесконечно малая последовательность. Следовательно, ab есть предел последовательности $\{x_n y_n\}$.

Теорема 17. Если $y_n \neq 0$, то частное сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность и ее предел равен частному пределов последовательностей.

Лемма:

Если последовательность $\{y_n\}$ сходящаяся последовательность, то $\{(1/y_n)\}$

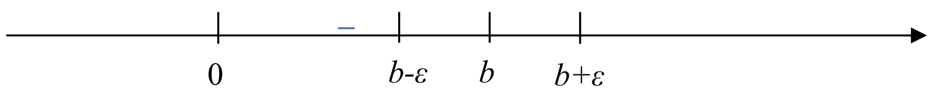


Рис. 7.

ограниченная последовательность.

Начиная с некоторого n $|y_n - b| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0$ то есть $b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$. Выберем $\varepsilon = |b/3|$. Рассмотрим случай $b > 0$. Тогда $\frac{2b}{3} < y_n < \frac{4b}{3}$, то есть $\frac{3}{4b} < \frac{1}{y_n} < \frac{3}{2b}$ что означает ограниченность последовательности $\{(1/y_n)\}$

Рассмотрим случай $b<0$. Тогда $\frac{3}{2b} < \frac{1}{y_n} < \frac{3}{4b}$ что означает ограниченность последовательности $\{(1/y_n)\}$.

Доказательство.

Пусть a и $b\neq0$ пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда $\{x_n\text{-}a\}=\{\alpha_n\}$ и $\{y_n\text{-}b\}=\{\beta_n\}$ бесконечно малые последовательности и $\{x_n/y_n\text{-}a/b\}=$ $=\{(\alpha_n+a)/(\beta_n+b)\text{-}a/b\}=\{[(\alpha_n+a)b\text{-}(\beta_n+b)a]/(y_nb)\}=\{[\alpha_nb+ab\text{-}\beta_na\text{-}ab]/y_nb\}=\{(1/\mathrm{y_n})[(\alpha_nb\text{-}\beta_na)/\mathrm{b}]\}=\{(1/\mathrm{y_n})\}\{[(\alpha_n\text{-}\beta_n(a/\mathrm{b})]\}$ Так как $\{(1/\mathrm{y_n})\}$, согласно лемме ограниченная последовательность, а $\{[(\alpha_n\text{-}\beta_n(a/\mathrm{b})]\}$– бесконечно малая последовательность тогда $\{x_n/y_n\text{-}a/b\}$ – бесконечно малая. Следовательно, a/b есть предел последовательности $\{x_n/y_n\}$.

Теорема 18 (о двух милиционерах). Пусть $x_n\ \ z_n\ \ y_n$ и $x_n\to a$, $y_n\to a$.
Тогда $z_n\to a$.

Доказательство. Из условия теоремы следует $x_n-a\ \ z_n-a\ \ y_n-a$. Тогда, если x_n y_n принадлежат ε окрестности а, то и z_n принадлежит ей (см. рис. 8).

Докажем это алгебраически. Рассматривая различные варианты расположения x_n y_n z_n и a относительно друг друга (мы это проделывать не будем,
предоставив это читателю) можно записать $|z_n-a|\ \ \max\{|x_n-a|,|y_n-a|\}$.

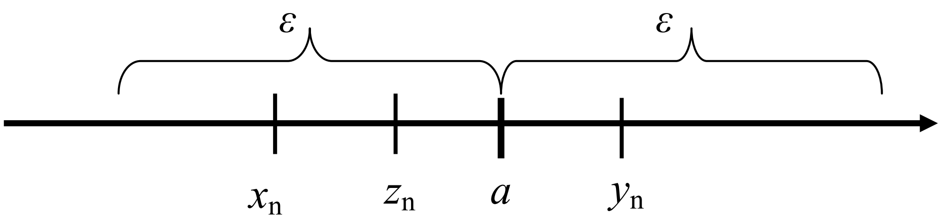


Рис. 8.

Фиксируем ε. Тогда в силу сходимости $x_n\to a$ и $y_n\to a$ *найдутся* N_1 и N_2 такие, что $|x_n-a|<\varepsilon$ *при* $n>N_1$ и $|y_n-a|<\varepsilon$ *при* $n>N_2$ Тогда $|z_n-a|<\varepsilon$ *при* $n>\max\{N_1,N_2\}$.

Монотонные последовательности.

Определение. 16. Последовательность $\{x\}$ называется неубывающей, (невозрастающей) если $x_n \;\; x_{n+1}(x_{n+1} \;\; x_n)$.
Определение. 17. Не убывающие и невозрастающие последовательности называются монотонными.

Теорема 19. Если неубывающая (невозрастающая) последовательность ограничена сверху (снизу), то она сходится.
Доказательство. Ограниченная неубывающая последовательность имеет точную верхнюю грань $\overline{x}$ (**теорема 4**). Эта точная верхняя грань и есть ее предел. Докажем это.

По определению точной верхней грани (определение **3**) для любого $\overline{x}-\varepsilon,\ \varepsilon>0$ найдется x_N такое, что $\overline{x}-\varepsilon<x_N \;\; \overline{x}$, но $x_N \;\; x_n \;\; \overline{x}$ для $n>N$, следовательно, для всех x_n у которых $n>N$ выполняется $\overline{x}-\varepsilon<x_n \;\; \overline{x}$, то есть $0<\overline{x}-x_n<\varepsilon$, или $|\overline{x}-x_n|<\varepsilon$, что соответствует определению предела.

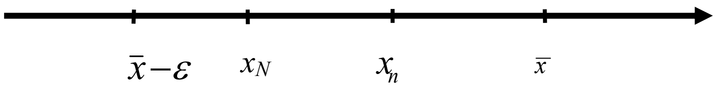


Рис. 9.

Если к предыдущей теореме присовокупить теорему **14**, то справедлива

Теорема 20. Чтобы монотонная последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена.

Теорема 21. У всякой стягивающейся, вложенной последовательности отрезков $[a_n[a_{n+1}[\dots]b_{n+1}]b_n]$ есть единственная общая точка.
Доказательство. Дано 1) $[a_n[a_{n+1}[\dots]b_{n+1}]b_n]$ 2) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$.

Тогда обе последовательности $\{a_n\}\{b_n\}$ монотонны и ограничены, следовательно, они имеют пределы. Докажем, что они совпадают.

Пусть это не так и они равны a' и b'. Тогда, в силу возрастания последовательности $\{a_n\}$ и убывания последовательности $\{b_n\}$ следует $b_n-a_n>b'-a'>0$ и, следовательно, длина интервала не стремится к нулю, что противоречит условию теоремы.

Определение 18. Пусть имеется последовательность $\{x_n\}$. Из множества натуральных чисел n выделим подмножество и упорядочим его. В результате получим последовательность $\{n_k\}$. Соответствующее этому упорядоченному множеству последовательность $\{x_{n_k}\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

Теорема. 22. Если последовательность сходится, то ее подпоследовательность сходится к тому же пределу.

<u>Доказательство</u>. По определению предела a последовательности $\{x_n\}$для любого ε найдется N такое, что для $n>N$ $|x_n - a| < \varepsilon$. Это означает что для номеров $n_k>N$ под последовательности выполняется $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$, а это означает что a является пределом под последовательности.

Число e.

Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$тогда

$$x_n = 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + C_n^2 \frac{1}{n^2} + \cdots + C_n^1 \frac{1}{n^n}$$

$$x_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(a)}$$

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \qquad \text{(b)}$$

Сравнивая почленно слагаемые в формулах (а) и (в) приходим к выводу, что $x_n<x_{n+1}$.

Заметим, что $n! > 2^n$ для n>3 Тогда

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) <$$

$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 3$$

То есть, наша последовательность возрастает и ограничена, и, следовательно, имеет предел. Обозначим его e.

Пусть имеется не убывающая последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ такая что $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ докажем что $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

Каждому x_n соответствуют натуральные числа $n_k=[x_n]$ и $n'_k=[x_n]+1= n_k+1$. Эти последовательности являются под последовательностями последовательности натуральных чисел и, следовательно, их предел равен бесконечности. Заметим также, вследствие этого последовательность $\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$ является подпоследовательностью последовательности $\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$ и согласно предыдущей теореме **22** они имеют одни те же пределы.

Выпишем ряд неравенств:

$$n_k \;\; x_k < n_k + 1$$

$$\frac{1}{n_{k+1}} < \frac{1}{x_k} \;\; \frac{1}{n_k}$$

$$1 + \frac{1}{n_{k+1}} < 1 + \frac{1}{x_k} \;\; 1 + \frac{1}{n_k}$$

$$\left(1+\frac{1}{n_{k+1}}\right)^{n_k} < \left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n_{k+1}}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}} < \left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)$$

Воспользуемся теоремой **22** о пределе под последовательности и тем что мы только что доказали что $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$, а $\lim_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$. Тогда по теореме **18** (о двух милиционерах) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

Произвольные последовательности.
Предельные точки.

Определение 19. Точка x называется предельной точкой последовательности $\{x_n\}$ если в любой ε окрестности точки содержится бесконечно много элементов последовательности.

Определение 20. Точка x называется предельной точкой последовательности $\{x_n\}$ если из последовательности можно выделить подпоследовательность сходящуюся к x.

Теорема 23. Определение **19** и определение **20** равносильны.
Доказательство.

Из определения сходящейся последовательности **12** в ε окрестности предела находится бесконечно много членов последовательности поэтому определение **19** следует из определения **20.**

Если в качестве ε окрестностей выбрать бесконечно малую последовательность ε_n и в каждой из них выбрать по одному члену нашей последовательности, то пронумеровав их, получим сходящуюся последовательность. Следовательно, определение **20** следует из определения **19.**

Теорема 24. Каждая сходящаяся последовательность имеет только одну предельную точку x, совпадающую с пределом этой последовательности.
Доказательство. Так как x– предел, то в любой ε окрестности этой точки, начиная с некоторого $N(\varepsilon)$ содержится бесконечное число членов нашей последовательности, согласно **определению 12**.

Если есть еще одна предельная точка x', то согласно **определению 20** можно выделить под последовательность к ней сходящуюся. Но, согласно **теореме 22,** любая под последовательность сходящейся последовательности имеет предел, равный пределу этой последовательности, следовательно, $x= x'$.

Теорема 25. У всякой ограниченной последовательности существует хоть одна предельная точка.
Доказательство. Так как последовательность ограничена, то у нее есть точный верхний b и точный нижней предел a. Рассмотрим на числовой оси отрезок $[a, b]$.

В нем выберем x_1. Разделим его пополам и выберем отрезок, содержащий бесконечное число нашей последовательности. Если оба отрезка содержат бесконечное число нашей последовательности, то выберем правый отрезок, а в нем какой-либо член нашей последовательности. Разделим этот отрезок пополам и повторим процедуру. Таким образом, мы построим под последовательность исходной последовательности и последовательность вложенных отрезков с длиной, стремящейся к нулю. У этих отрезков, согласно теореме **21,** есть единственная общая точка *X*. Эта точка и есть предел нашей под последовательности. Докажем это. Рассмотрим ε окрестность точки *X*. Так как мы делили отрезок каждый раз на два, то получали отрезки длиной $\frac{b-a}{2^N}$ Нам нужно найти такое *N* чтобы $\frac{b-a}{2^N} < \varepsilon$ или $2^N > \frac{b-a}{\varepsilon}$, но $2^N > N$. Тогда выберем *N* так, чтобы

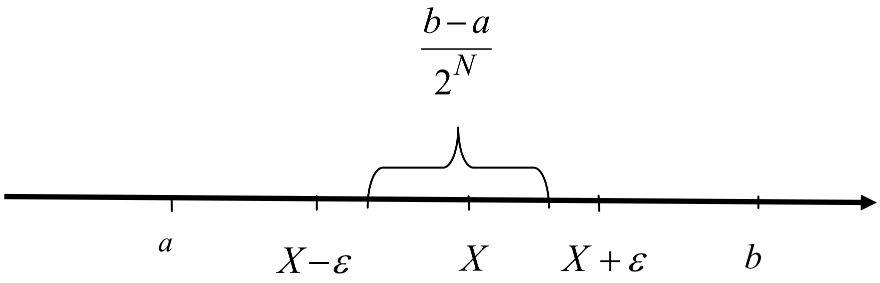


Рис. 10.

$N > \frac{b-a}{\varepsilon}$ тогда $2^N > N > \frac{b-a}{\varepsilon}$ и неравенство $\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$ выполняется для всех $n > N$. Выбирая и нумеруя в каждом получаемом отрезке какой-либо член исходной последовательности получим сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, справедлива

Теорема 26. (**Больцано-Вейерштрасса**) Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Из всяческой неограниченной последовательности можно выделить бесконечную подпоследовательность.

Фундаментальная последовательность.

Определение 22. Последовательность называется фундаментальной если для любого $\varepsilon>0$ (сколь угодно малое оно бы ни было) найдется такое *N*, что для $n>N$ и $p>0$ $|x_n - x_{n+p}|<\varepsilon$ (*N* зависит от ε). (Это значит что для любого ε существует такой член последовательности в ε окрестности которого соберутся все остальные члены последовательности).

Теорема 27 (критерий Коши). Чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно чтобы она была фундаментальной.

<u>Доказательство.</u> 1) Пусть последовательность сходится к пределу *a*. Выберем $\varepsilon/2$. Тогда найдется *N*, такое что для $n>N$ и $p>0$ $|a-x_n|<\varepsilon/2$ и, следовательно, $|a-x_{n+p}|<\varepsilon/2$. Тогда $|x_n - x_{n+p}|<|x_n - a - x_{n+p} + a|<|x_n - a|+|x_{n+p} - a|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$.

Следовательно, последовательность фундаментальная.
2) Пусть последовательность фундаментальная. Докажем, сначала, что она

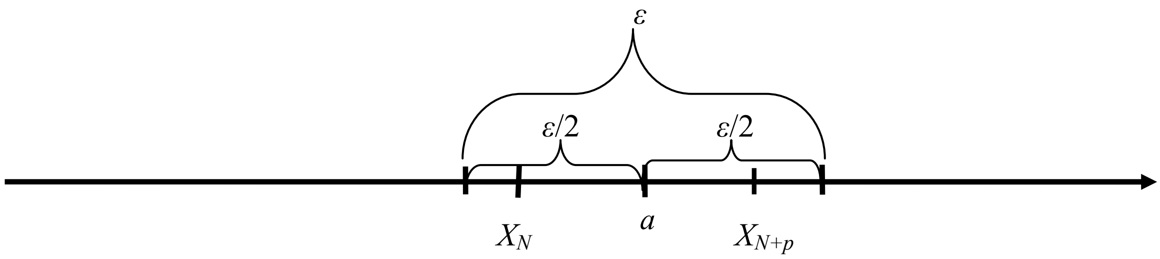


Рис. 11.

ограничена. В силу фундаментальности последовательности найдется такое N, что для $n>N$ и $p>0$ $|x_n - x_{n+p}|<\varepsilon$ (N конечно, зависит от ε). Это означает, что в ε окрестности точки x_N находится бесконечное число членов нашей последовательности у которых номер больше N, следовательно, она ограничена. Согласно **теореме 26** (Больцано-Вейерштрасса), из этой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся под последовательность $\{x'_{n_l}\}$ (n_l- номера членов под последовательности). Пусть она сходится к a. Выберем ε. Тогда по **определению 12** сходящейся последовательности найдется $N_1(\varepsilon/2)$ такое, что для $n_1>N_1$ $\left|x_{n_1} - a\right| < \varepsilon/2$. По **определению 22** фундаментальной последовательности для любого $\varepsilon>0$ (сколь угодно мало оно бы ни было) найдется такое $N_2(\varepsilon)$, что для $n>N_2(\varepsilon)$, и $p>0$ $|x_n - x_{n+p}|<\varepsilon/2$ (n- номера исходной последовательности). Выберем $N_3>max\{N_1(\varepsilon/2), N_2(\varepsilon/2)\}$. Тогда для все x_n, номера которых больше N_3, будут лежать в $\varepsilon/2$ окрестности точки x_{N_3} выделенной из сходящейся подпоследовательности, которая в свою очередь удалена, как видно из рисунка, на расстояние меньшее чем $\varepsilon/2$ от тоски a. А это означает, что в ε окрестности точки a находятся все x_n у которых номера больше N_3. Следовательно, по **определению 12** a является пределом последовательности.

Докажем, что предел единственный. Пусть возможно из главной последовательности выделить под последовательность, сходящуюся к a'. и $|a - a'| = L$. Тогда выберем $\varepsilon<L/2$. Тогда, проведя аналогичные рассуждения относительно a', мы получим что начиная с некоторого N_5 все члены основной

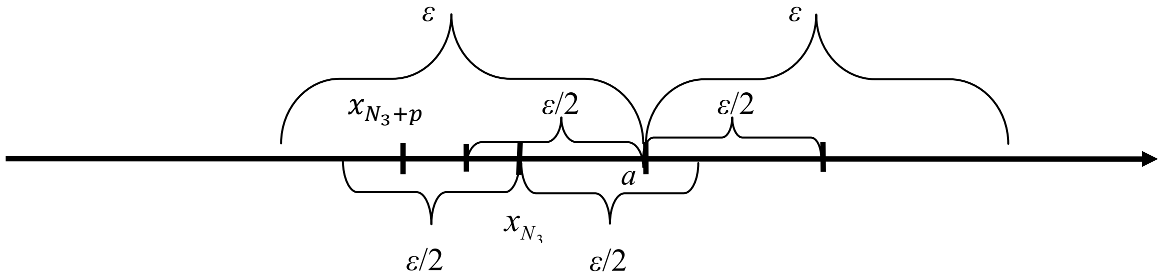


Рис. 12.

последовательности соберутся в ε окрестности a'. Следовательно, начиная с номера большего чем максимальное из N, все члены основной последовательности соберутся в ε окрестностях точек a и a' одновременно, чего не может быть, так как ε окрестности точек a и a' не пересекаются.

Теорема 29. (Штольца). Пусть $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ - две последовательности вещественных чисел, причём положительна, не ограничена и строго возрастает (хотя бы начиная с некоторого члена). Тогда, если существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=I$ то существует и предел $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ причём эти пределы равны.

Докажем лемму: если $0<b,\ 0<d,\ \alpha<\frac{a}{b}<\beta$ и $\alpha<\frac{c}{d}<\beta$ то $\alpha<\frac{a+c}{b+d}<\beta$.

Умножив неравенства $\alpha<\frac{a}{b}<\beta$ и $\alpha<\frac{c}{d}<\beta$ на b и d соответственно, получим $\alpha b<a<\beta b$ и $\alpha d<c<\beta d$. Сложив полученные неравенства получим $\alpha b+\alpha d<a+c<\beta b+\beta d$, или $\alpha(b+d)<a+c<\beta(b+d)$. Следовательно, $\alpha<\frac{a+c}{b+d}<\beta$.

Выберем ε и запишем цепочку неравенств

$$\left|\frac{x_{N+1}-x_N}{y_{N+1}-y_N}-I\right|<\varepsilon\ \to I-\varepsilon<\frac{x_{N+1}-x_N}{y_{N+1}-y_N}<I+\varepsilon$$

$$I-\varepsilon<\frac{x_{N+2}-x_{N+1}}{y_{N+2}-y_{N+1}}<I+\varepsilon$$

$$I-\varepsilon<\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_n}<I+\varepsilon$$

Применяя последовательно к каждой паре неравенств доказанную лемму получим

$$I-\varepsilon<\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}<I+\varepsilon \qquad (*)$$

Теперь рассмотрим ряд тождеств $\frac{x_n}{y_n}-I=\frac{x_n-y_nI}{y_n}=\frac{x_n-Iy_n+x_N-x_N+Iy_N-Iy_N}{y_n}=$ $\frac{x_N-Iy_N+(x_n-x_N)+(Iy_N-Iy_n)}{y_n}=\frac{x_N-Iy_N}{y_n}+\frac{(x_n-x_N)+I(y_N-y_n)}{y_n}=\frac{x_N-Iy_N}{y_n}+\frac{y_n-y_N}{y_n}\left(\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-I\right)$

Тогда $\left|\frac{x_n}{y_n}-I\right|=\left|\frac{x_N-Iy_N}{y_n}+\frac{y_n-y_N}{y_n}\left(\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-I\right)\right|$ $\left|\frac{x_N-Iy_N}{y_n}\right|+\left|\frac{y_n-y_N}{y_n}\right|\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-I\right|$

Поскольку мы цепочкой неравенств разорвали n от N, то удерживая N можно $n\to\infty$.

Тогда в следствие $y_n\to\infty$ и условий теоремы $\frac{x_N-Iy_N}{y_n}\to 0,\ \frac{y_n-y_N}{y_n}\to 1,$

а из (*) следует $\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}\to I$, тогда получим $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=I.$

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ.

Определение предела функции 22. Если на сегменте $[a,b]$ каждому числу, ему принадлежащему, поставлено в соответствие только одно число, то говорят, что на сегменте $[a,b]$ задана функция $f(x)$.

Определение предела функции по Гейне 23. Число: b называется пределом функции $f(x)$ в точке a если для любой последовательности значений аргумента $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \ldots$, сходящейся к a, причем $x_n \neq a$, соответствующая ей последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n) \ldots$ сходится к b.

Определение предела функции по Коши 24. Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a если для любого положительного числа ε (сколь мало оно не было) найдется число $\delta(\varepsilon)$, зависящее от ε, такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$ (x принадлежащих δ окрестности a), справедливо $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Теорема 30. Определение предела функции по Коши эквивалентно определению по Гейне.

<u>Докажем</u>**,** что из определения предела функции по Коши следует определение по Гейне.

Выберем любую сходящаяся к a последовательность $\{x_n\}$. Затем фиксируем число ε и по нему находим число $\delta(\varepsilon)$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$ (x принадлежащих δ окрестности a, справедливо $|f(x) - b| < \varepsilon$. Тогда, по определению сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$, для этого δ найдется число $N(\delta)$ такое, что для всех $n \quad N \quad 0 < |x_n - a| < \delta$. Тогда, согласно определению предела функции по Коши, $|f(x_n) - b| < \varepsilon$, а это, в силу произвольности ε, означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

<u>Докажем</u>**,** что из определения предела функции по Гейне следует определение по Коши.

Доказательство проведем от противного. Пусть в точке a условия, упомянутые в определении предела функции по Гейне, выполняется, а условия, упомянутые в определение предела функции по Коши, не справедливы. Отсутствие предела функции по Коши в точке a означает, что найдется такое ε (зависящее от вида $f(x)$), что для любого δ найдется x, удовлетворяющие условию $0 < |x - a| < \delta$. (x принадлежит δ окрестности точки a) такое, что $|f(x_n) - b| \quad \varepsilon$.

Выберем число b, являющееся пределом функции по Гейне в точке a и последовательность $\delta_n = \frac{1}{n}$. Так как условия, упомянутые в определение предела функции по Коши в точке a не справедливы, то для каждого δ_n найдется x_n такое, что $0 < |x_n - a| < \delta$. и $|f(x_n) - b| \quad \varepsilon$

Это означает, что x_n образуют последовательность $\{x_n\}$ сходящуюся к a, а $f(x_n)$ расходящуюся (не сходящуюся к b) последовательность $\{f(x_n)\}$, что противоречит условию, входящему в определении предела функции по Гейне.

Правый (левый) предел функции.

Определение по Гейне 25. Число b называется правым (левым) пределом функции $y=f(x)$ в точке a, если для любой последовательности значений аргумента $x_n>a$ ($x_n<a$), сходящейся к a,, соответствующая ей последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к b.

Определение по Коши 26. Число b называется правым (левым) пределом функции $f(x)$ в точке a если для любого положительного числа ε (сколь мало оно не было) найдется число $\delta(\varepsilon)>0$, зависящее от ε, такое, что для всех x, удовлетворяющих условиям $0 < x - a < \delta$ $(0 < a - x < \delta)$, справедливо $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Предел функции при $x\to\pm\infty$.

Определение по Гейне 27. Число b называется пределом функции при $y=f(x)$ при $x\to\pm\infty$ если для бесконечно большой возрастающей (убывающей) последовательности значений аргумента x_n, соответствующая ей последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к b.

Определение по Коши 28. Число b называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to\pm\infty$ если для любого положительного числа ε (сколь мало оно не было) найдется число $B(\varepsilon)>0$, зависящее от ε, такое, что для всех $x>\delta$, ($x<-\delta$), справедливо $|f(x) -| < \varepsilon$.

Критерий Коши существования предела функции.

Определение 29. Функция $y=f(x)$ удовлетворяет **критерию Коши** в точке a, если для любого положительного числа ε (сколь мало оно не было) найдется число $\delta(\varepsilon)$, зависящее от ε, такое, что для двух любых чисел x' и x'', удовлетворяющих условию
$0 < |x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$, справедливо $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема 31. Чтобы функция в точке a имела предел необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла в точке a критерию Коши.
Доказательство. 1) Пусть функция имеет предел в точке a по Коши. Докажем, что она удовлетворяет критерию Коши.
Фиксируем ε/2. Тогда из сходимости по Коши найдется такое δ, что для $0 < |x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$ справедливо $|f(x') - b| < \varepsilon/2$.$|f(x') - b| < \varepsilon/2$.
Тогда $|f(x') - f(x'')| = |f(x') - b - (f(x'') - b)|$ $|f(x') - b| + |f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
2) Пусть функция $y=f(x)$ удовлетворяет критерию Коши в точке a, то есть для любого положительного числа ε (сколь мало оно не было) найдется число $\delta(\varepsilon)$, зависящее от ε, такое, что для двух чисел x' и x'', удовлетворяющих условию $|x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$, справедливо $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Выберем последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к a. Тогда в силу сходимости $\{x_n\}$ найдется N такое, что для $n > N$ $|x_n - a| < \delta$ и для $p>0$, соответственно, $|x_{n+p} - a| < \delta$. Из критерия Коши для функции вытекает, для $n>N$ и для $p>0$ $|f(x_n) - f(x_{n+p})| < \varepsilon$, а это означает фундаментальность последовательности $f(x_n)$ и, следовательно, она, согласно теореме **27 (критерий Коши для сходимости последовательности),** сходится.

Докажем, что этот предел не зависит от выбора последовательности x_n. Выберем последовательность x'_n сходящуюся к a и пусть $f(x'_n)$ имеет предел b' .Организуем объединенную последовательность $\{x''_n\} = \{x_n, x'_n\}$. Эта последовательность также будет сходиться к a. Тогда последовательность $f(x''_n)$ также сходится к какому-то числу b''. Последовательности $f(x_n)$ и $f(x'_n)$ будут ее под последовательностями $f(x''_n)$. Но согласно **теореме 21** под последовательности сходящейся последовательности сходятся к одному и тому же пределу. Значит $b = b' = b''$.

В силу **определения 25** предела функции по Гейне и **теорем 15, 16, 17** предел суммы функций равен сумме пределов, предел произведения функций равен произведению пределов, предел частного функций равен частному пределов.

Непрерывность функции.

Определение 29. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если функция имеет предел в этой точке, и он равен $f(a)$.

Точки разрыва функций и их классификация.

1. Устранимый разрыв.

Точка a называется устранимой точкой разрыва, если предел в этой точке существует, но значение функции в этой точке либо не определено, либо имеет значение не равное пределу в этой точке. Этот разрыв устраняется руками если положить $f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x)$. Например $f(x) = \frac{x}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 1$.

2. Разрыв первого рода.

Точка a называется разрывом первого рода, если в этой точке функция имеет не равные конечные левый и правый пределы. Пример: $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

3. Разрыв второго рода. Точка a называется точкой разрыва второго рода, если в этой точке нет одного или обоих односторонних пределов, или хотя бы один из них бесконечен. Например $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, или $f(x) = \tan x$ $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{|x|}+$.

Замечательные пределы.

1**)** $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$ − примем как аксиому.

2a) $\boldsymbol{\lim_{x\to +0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$

Выберем произвольную последовательность $0 < x_k \to 0$ и выпишем неравенства: $\frac{1}{x_k}\ \ n+1 \to \frac{1}{n+1}\ \ x_k\ \ \frac{1}{n}$ где n – целая часть $\frac{1}{x_k}$. Отсюда следует что:

$1+\frac{1}{n+1}\ \ 1+x_k\ \to\ \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\ \ (1+x_k)^n\ \ (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}\ \ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, то есть $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\ \ (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}\ \ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Далее рассмотрим последовательности

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$ и $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Для их пределов можно записать что $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = e$ и $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$

Тогда по теореме о двух милиционерах найдем что искомый предел есть e.

2b) $\lim_{x\to -0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Выберем произвольную последовательность $-1 < x_n < 0$, $x_n \to -0$. Делаем замену переменной $x_n = \frac{-y_n}{1+y_n}$, $y_n = \frac{-x_n}{1+x_n} \to +0, y_n > 0$

$$(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \left(1-\frac{y_n}{1+y_n}\right)^{-\frac{1+y_n}{y_n}} = (1+y_n)^{\frac{1}{y_n}}(1+y_n) \to e$$

2c) $\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$

Выберем любую последовательность $t_n \to \infty$. Сделаем замену $t_n = \frac{1}{x_n}$. Тогда $\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \lim_{x\to+0}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$

3) $\mathbf{\lim_{t\to\infty}\sqrt[x]{x} = 1}$.

Докажем что $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$. Пусть $\sqrt[n]{n} = 1+\alpha_n$ Докажем, что α_n– бесконечно малая последовательность. Возведем последнее равенство в n-ю степень. Получим $n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \cdots\ \ \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$ так как в следствие свойств функции $\sqrt[n]{n}$ величина α_n не отрицательная. Тогда $n\ \ \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$. Следовательно, $0\ \ \alpha_n\ \ \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ и в следствие теоремы о двух милиционерах найдем что искомый предел равен 0, то есть $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$. Отсюда следует что $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(n+1)\frac{n}{n}} =$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} = 1$, а так же $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{n\frac{n+1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{n+1}\sqrt[n+1]{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} =1$.

Выберем последовательность $x_n \to \infty$. Тогда $\{[x_n]\}$ есть подпоследовательность последовательности $\{n\}$ и в следствие $\lim_{[x_n]\to\infty}\sqrt[[x_n]+1]{[x_n]}\ \ \lim\limits_{x_n\to\infty}\sqrt[x_n]{x_n}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[[x_n]]{[x_n]+1}$ и теорем **22** (о пределе подпоследовательности) и **18** (о двух милиционерах) $\lim_{x_n\to\infty}\sqrt[x_n]{x_n} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x} = 1$.

4) $\mathbf{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(1+a)^x} = 0}$, $a > 0$.

Докажем, что $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+a)^n}=0$, $a>0$. Выберем последовательность $x_n\to\infty$. Тогда $[x_n]$ есть подпоследовательность последовательностей $\{n\}$ и $\{x_n\}$. Рассмотрим цепочки соотношений $0<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(1+a)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2+\cdots}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}a^2}=0$. Тогда $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+a)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(1+a)^{n+1}}\frac{n}{n+1}=0$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(1+a)^n}=0$, а $\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{(1+a)^{[x]+1}}$ $\lim\limits_{x\to\infty}{}_{x\to\infty}\frac{x_n}{(1+a)^{x_n}}$ $\lim_{x\to\infty}\frac{[x]+1}{(1+a)^{[x]}}$. $\Rightarrow$ из теорем **22 18** $\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x}{(1+a)^x}=0$.

5) $\mathbf{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=0}$

$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\left\{t=a^x-1, x=\frac{\ln(x+1)}{\ln(a)}\right\}=\lim_{t\to 0}\frac{t\ln(a)}{\ln(t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(a)}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}$ =ln(a).

6) $\mathbf{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=\boldsymbol{a}}$

$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=\left\{t=(1+x)^a-1\to\ 1=\frac{a\ln(x+1)}{\ln(t+1)}\right\}=\lim_{t\to 0}\frac{a\,t\ln(x+1)}{x\ln(t+1)}=$

$=\frac{a\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}=a.$

7)

$\lim\limits_{\substack{u(x)\to 1\\ v(x)\to\infty}} u(x)^{v(x)}=$

$\lim\limits_{\substack{u(x)\to 1\\ v(x)\to\infty}}\left(1+(u(x)-1)\right)^{\frac{1}{u(x)-1}(u(x)-1)v(x)}=e^{\lim\limits_{\substack{u(x)\to 1\\ v(x)\to\infty}}(u(x)-1)v(x))}$

Свойства монотонных функций.

Определение 30. Функция называется не убывающей (не возрастающей) на сегменте $[a,b]$, если для любых, таких что $x_1<x_2$ выполняется $f(x_1)\leq f(x_2)$ ($f(x_1)\geq f(x_2)$). Такая функция называется **монотонной.**

Определение 31. Функция называется убывающей (возрастающей) на сегменте $[a,b]$, если для любых, таких что таких что $x_1<x_2$ выполняется $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$).

Теорема 32. Если функция монотонна на сегменте $[a,b]$, то у нее существует правый и левый пределы в любой внутренней точке и правый в точке a и левый в точке b.

<u>Доказательство.</u> Докажем существование правого предела в точке c ($a<c<b$). Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Рассмотрим множество значений функции $\{f(x)\}$ у которых аргумент $c<x\ \ b$. Это множество не пусто и в силу не убывания $f(c)\leq f(x)$. Следовательно, у него существует точная нижняя грань. Обозначим ее γ. Докажем, что γ есть правый предел $f(x)$ в точке c. Фиксируем $\varepsilon>0$. По **определению 3** точной нижней грани найдется $f(x')\in\{f(x)\}$ такое, что $\gamma\ \ f(x')<\gamma+\varepsilon$. Обозначим $x'=c+\delta$ (отметим, что $x'\neq c$). Тогда для $x''\in(c,c+\delta)$ будет выполняться $f(x'')\in\left(\gamma,f(x')\right)\in$

$(\gamma, \gamma+\varepsilon)$ в силу не убывания $f(x)$. То есть, мы нашли такое $\delta(\varepsilon)$, что для всех $x \in (c, c+\delta)$ $f(x) \in (\gamma, \gamma+\varepsilon)$, а это и есть определение предела функции.

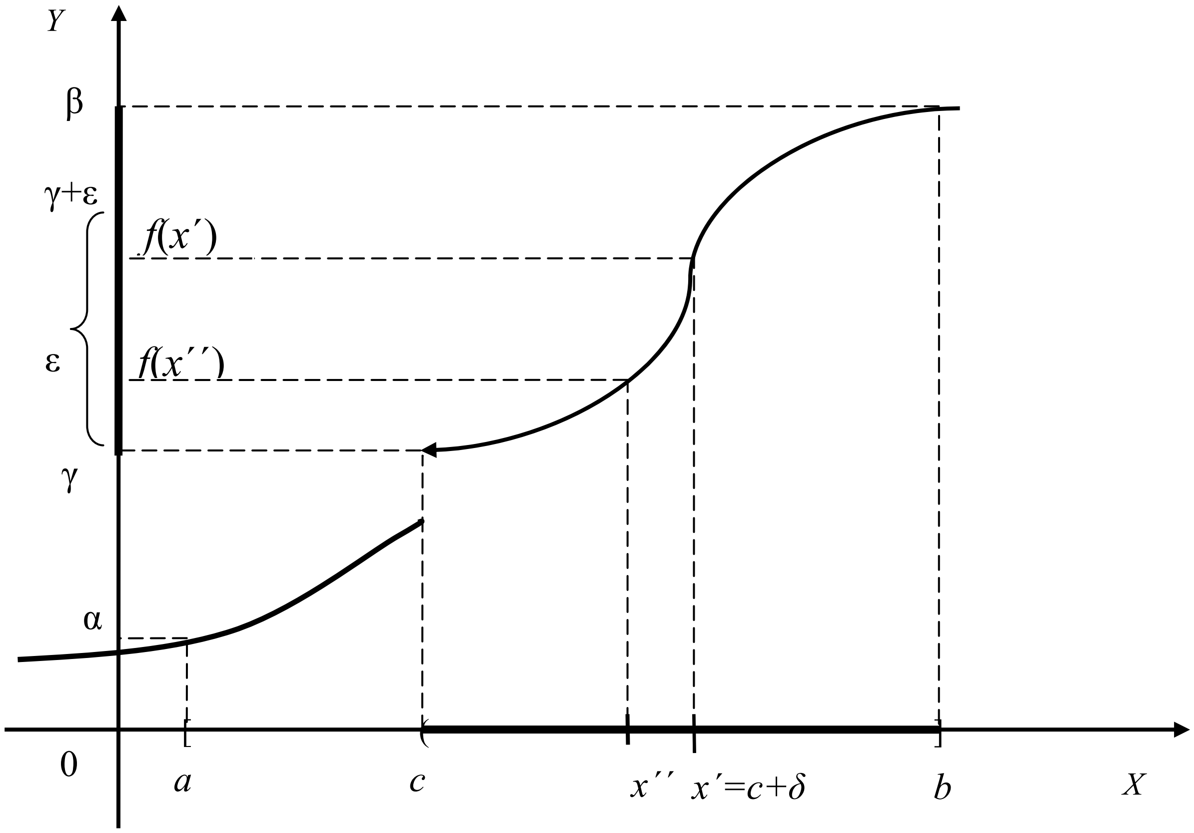


Рис. 13.

Теорема 33. Пусть $f(x)$ возрастает на $[a,b]$ и $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$. Тогда на $[\alpha,\beta]$ можно определить обратную функцию, обратив начальное соответствие $x \to y$. Это соответствие $y \to x$ будет **обратной функцией** $f^{-1}(y)$. Она также возрастающая.

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ возрастает на $[a,b]$. Каждому x из $[a,b]$ ставится только одно $y = f(x)$ из $[\alpha,\beta]$ по определению функции.

Докажем от противного однозначность соответствия $y \to x$, что является условием существования обратной функции. Пусть $y \to x_1$, $y \to x_2$ и $x_1 \neq x_2$. Эти соответствия построены на соответствиях $x \to y$, то есть $x_1 \to y_1$, $x_2 \to y_2$ причем $y_1 = y_2 = y$, но в силу возрастания $f(x)$ этого не может быть.

Докажем от противного что $f^{-1}(y)$ возрастает. Пусть это не так, то есть $y_1 < y_2$ и $y_1 \to x_1$, $y_2 \to x_2$ при этом $x_1 > x_2$. Но эти соответствия получаются при обращении соответствий $x_1 \to y_1$, $x_2 \to y_2$, а в силу возрастания y $y_1 > y_2$, что противоречит предположению.

Теорема 34. Пусть $f(x)$ возрастает на $[a,b]$ и $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$. Тогда для того, чтобы $f(x)$ была непрерывной, необходимо и достаточно чтобы любое $\gamma \in [\alpha,\beta]$ было значением функции $f(x)$.

Необходимость. Пусть $y = f(x)$ непрерывна и возрастает на $[a,b]$. Докажем, что любое $\gamma \in [\alpha, \beta]$ является значением функции $f(x)$.

Пусть $\{x_l\}$ множество значений аргументов $x \in [a, b]$ функции для которых $f(x)\ \ \gamma$. Это множество не пусто, так как $f(a) = \alpha < \gamma$ и ограничено.

У множества $\{x_l\}$ существует точная верхняя грань, так как оно ограничено. Обозначим эту точную верхнюю грань как c_l=sup(x).

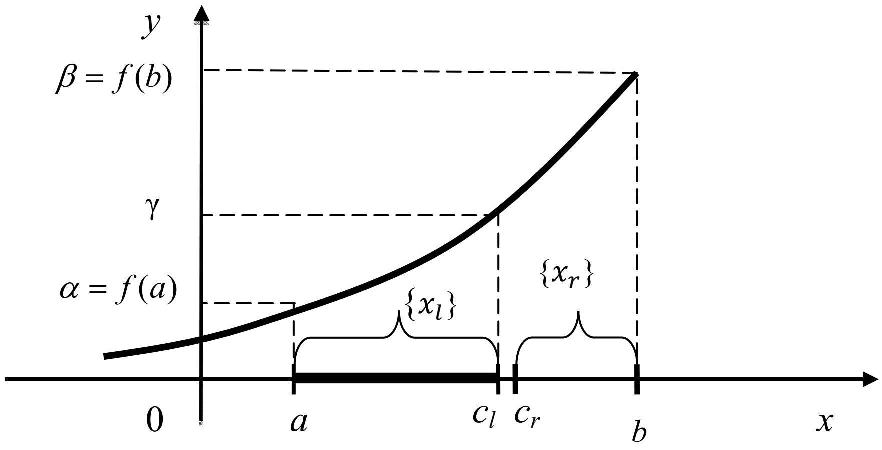


Рис.14.

Пусть $\{x_r\}$ множество значений аргументов $x \in [a, b]$ функции для которых $f(x) > \gamma$. Это множество не пусто, так как $f(b) = \beta > \gamma$ и ограничено.

У множества $\{x_r\}$ существует точная нижняя грань, так как оно ограничено. Обозначим эту точную верхнюю грань как c_r=inf (x').

1) Докажем, что $c_l = c_r$.

Сначала докажем, что **<u>c_l – внутренняя точка [*a*,*b*].</u>**

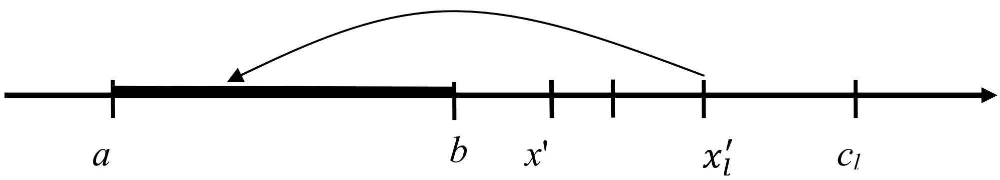


Рис. 15.

<u>Вне [*a*,*b*] она находиться не может</u> по определению $\{x_l\}$ и **определению 3** точной верхней грани (c_l> *a* – очевидно. Если c_l>*b*, то по **определению 3** точной верхней

грани для любого $x' \in (b, c_l)$ должна найтись точка $x_l' \in [x', c_l]$ из множества $\{x_l\}$ (см. рис. 15) чего не может быть, исходя из определения $\{x_l\}$).

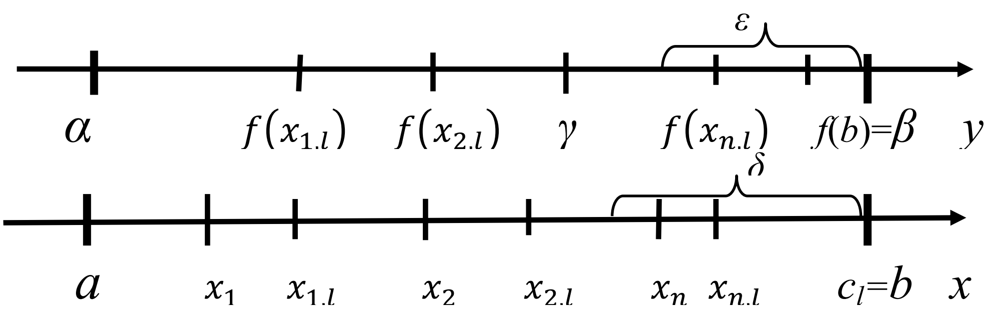


Рис 16.

<u>Докажем от противного, что $c_l \neq b$.</u> Пусть $c_l=b$. Выберем последовательность $x_{l,n} \to b$ где $x_{l,n} \in \{x_l\}$ Это возможно, если применить определение **3** точной верхней грани. (Сначала выберем произвольную последовательность $x_n \to b-0$. По **определению 3** точной верхней грани найдется $x_{n,l} \in \{x_l\}$ такое что $x'_n < x_{n,l} < b$, что означает $x_{n,l} \to b$). Тогда, в силу непрерывности $f(x_{n,l}) \to f(b) = \beta > \gamma$. Но, между β и γ существует щель конечного размера, а сходимость $f(x_{n,l}) \to f(b) = \beta$ означает, что внутри этой щели будут $f(x_{n,l})$. С другой стороны по определению множества $\{x_l\} \Rightarrow \ f(x_{n,l}) < \gamma$. Значит, мы пришли к противоречию.

Докажем от противного, что <u>$c \neq a$.</u> Пусть $c=a$. Выбрать $x_{n,l} \to a$ можно только взяв $x_{n,l} = a$. Это означает, что всем $f(x)<\gamma$ соответствует $x=a$, что противоречит определению функции.

Докажем, что <u>**$\{x_l\}$ содержит все точки $[a,b]$ левее c_l**</u>. Возьмем $x \in [a,c)$ тогда, как следует из **определения 3** точной верхней грани, найдется $x'_l \in \{x_l\}$ такое, что $x < x'_l \ \ c$. Следовательно, в силу возрастания функции $\alpha < f(x) < f(x'_l) < \gamma$ и, следовательно, $x \in \{x\}$. То есть $x \in \{x_l\}$.

По аналогии можно так же доказать что <u>**$\{x_r\}$ содержит все точки $[a,b]$ правее c_r.**</u>

Отметим, что в следствие этого **$[a,c_l)$ и $(c_r,b]$ не пересекаются и c_l⍰c_r**.

Перейдем к окончанию доказательства.

Для этого нужно доказать что $c_l=c_r=c$ и, как следствие этого, $\lim_{x\to c-0} f(x) = \lim_{x\to c+0} f(x) = f(c) = \gamma$. Проведем доказательство от противного. Пусть $c_l>c_r$. Рассмотрим левый предел $f(c_l)$ в точке c_l. Построим $x_{l,n} \to c_l - 0$. Из существования предела функции $f(x)$ на [a,b] и ее возрастания $\lim_{x\to c-0} f(x) = f(c_l)$. Пусть $f(c_l) < \gamma$.

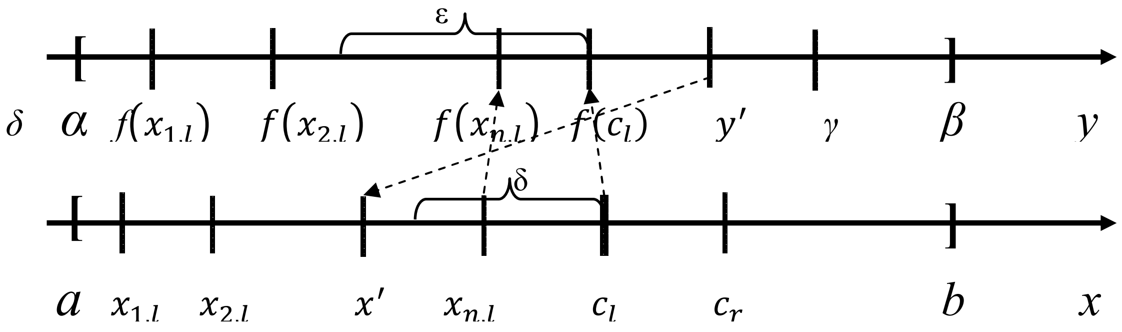


Рис. 17.

Теперь выберем точку $y' \in (f(c_l), \gamma)$ (см. рис. 17). Ей соответствует точка x'. Выберем левую δ- окрестность точки так чтобы $c_l - x' > \delta$. Тогда в последовательности $x_{l,n}$ найдется $x_{l,n} \in (c_l - \delta, c_l)$. Это означает что $x' < x_{n,l}$, а $y' > f(x_{n,l})$. Эти соотношения противоречат возрастанию функции. Значит предположение $f(c_l) < \gamma$ неверно и $f(c_l) = \gamma$.

Аналогично доказывается что $f(c_r) = \gamma$. В силу возрастания функции последние два равенства могут быть выполнены только если c_r=c_l.

А так как, по определению непрерывной функции, предел функции равен точке c_r=c_l равен ее значению в этой точке, то $f(c_l)$=γ.

<u>Достаточность.</u> Пусть $f(x)$ возрастает на $[a,b]$ и $f(a)$=α, $f(b)$=β и любое $\gamma \in [\alpha, \beta]$ является значением функции (x). Докажем что функция $f(x)$ непрерывна справа. Для непрерывности слева доказывается аналогично.

В силу ограниченности и возрастания функции $f(x)$ разрыв может быть только второго рода.

Пусть функция $f(x)$ не является непрерывной справа в точке c a $c <$ Тогда $\lim_{x \to c+0} f(x) = f(c+0)$. существует в силу **теоремы 32**, а в силу возрастания $f(x)$ $f(c) < f(c+0)$ (это следует из того, что если выбрать $x_n \to c$ $x_n > c$, то в силу возрастания функции $f(x_n) > f(c)$ и, следовательно, $f(c+0) > f(c)$ (равенства не может быть, так как мы предположили что функция в этой точке не является непрерывной справа).

Тогда $\alpha = f(a)$ $f(x_a)$ $f(c) < f(c+0)$ $f(x_b)$ $f(b) = \beta$, (где $x_a \in (a, c)$, $x_b \in (c, b)$) что означает существование щели $f(c) < f(c+0)$, а это противоречит тому, что все точки между α и β являются значениями функции $f\{x\}$.

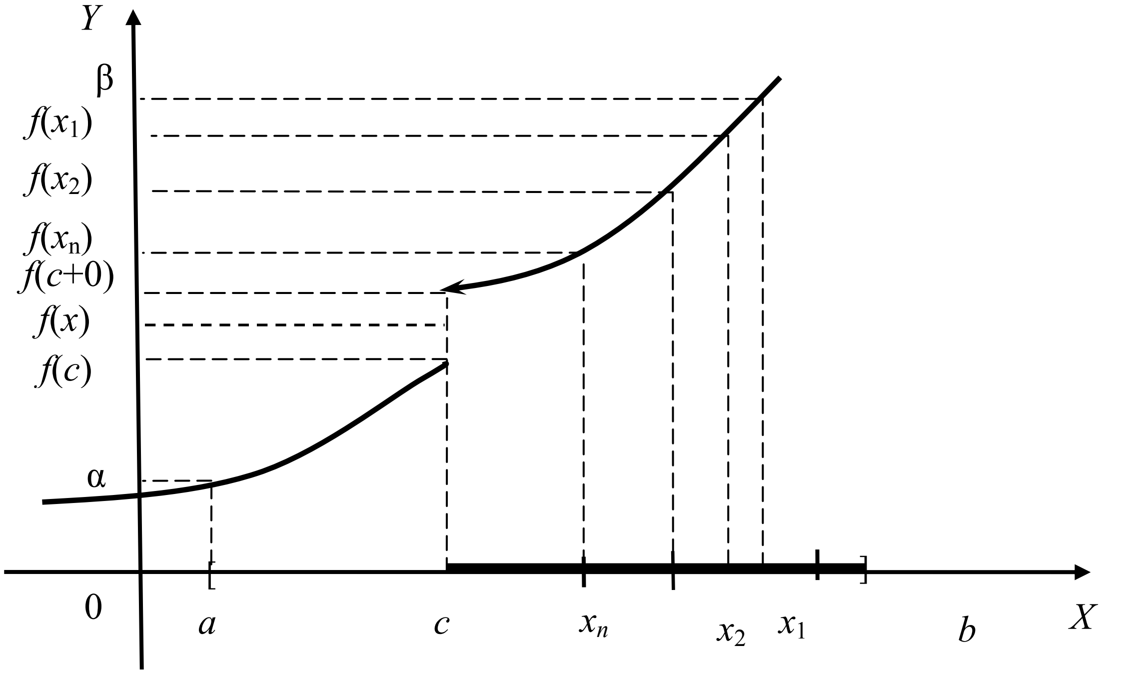


Рис. 18.

Скажем яснее. Пусть $f(x)$ есть значение функции в точке x и $f(c) < f(x) < f(c+0)$, тогда $x \notin [a,c)$. Так как если $x \in [a,c]$, то$f(x) < f(c)$ что противоречит $f(c) < f(x) < f(c+0)$, но $x \notin (c,b]$ так как можно выбрать последовательность $x_n \to c+0$ справа и найдется $x_n < x$, что означает что $f(x_n) < f(x)$ и, следовательно $f(c+0) < f(x)$, что противоречит $f(c) < f(x) < f(c+0)$.

Локальные и глобальные свойства функций.

Локальные свойства функций это свойства функций, которые справедливы в сколь угодно малой окрестности фиксированной точки. (Непрерывность – локальное свойство).

Глобальные свойства – это свойства, связанные со всей областью определения функции (например, монотонность).

Определение 32. Функция $f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) на множестве $\{x\}$,если существует такое вещественное число M (m) что если для всех $\{x\}$ справедливо $f(x)\ \ M$ $(f(x)\ \ m)$ M – называется верхней (нижней) гранью функции на множестве $\{x\}$.

Определение 33. Функция называется ограниченной если она ограничена сверху и снизу ($m\ \ f(x)\ \ M\ \ x \in \{x\}$).

Теорема 35. Пусть функция имеет предел M в точке a. Тогда существует такое δ>0, что функция ограничена на $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

<u>Доказательство</u>. Если есть предел, то по определению предела для любого ε найдется такое δ , что для $x \in (a-\delta,a)(a,\delta+\delta)$. Добавив к $f(x) \in (M-\varepsilon, M+\varepsilon)$ точку $f(a)$ можно сказать что функция ограничена.

Теорема 36. Пусть функция $f(x)$ задана на множестве $\{x\}$ и непрерывна в точке a и $f(x) > 0$. Тогда существует такое $\delta>0$, что функция положительна (отрицательна) на пересечении $x \in (a-\delta, a+\delta)$ и $\{x\}$.

Доказательство. Если есть предел, то по определению предела для любого ε, например $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$ найдется такое δ, что для $x \in (a-\delta, a+\delta)$ $f(x) \in \left(f(a) - \frac{f(a)}{2}, f(a) + \frac{f(a)}{2}\right)$. Но $\frac{f(a)}{2} > 0$.

Глобальные свойства непрерывных функций.

Теорема 37. Пусть функция $f(x)$ задана и непрерывна на сегменте $[a,b]$ и $f(a)f(b) < 0$. Тогда на $[a,b]$ найдется точка $\xi \in (a,b)$, в которой $f(\xi)=0$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Пусть $\{x\}$ множество для которых $f(x) < 0$. Это множество не пусто и ограничено нулем. Согласно **теореме 5**, это множество имеет точную верхнюю грань. Обозначим ее ξ. Она является внутренней точкой $[a,b]$. Докажем это.

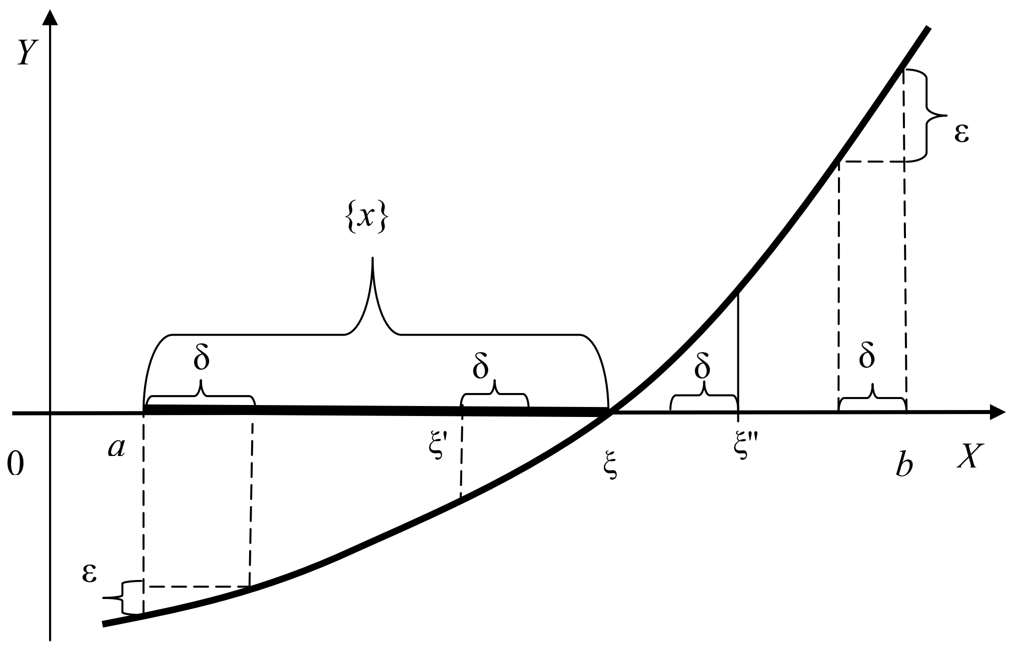


Рис. 19.

Так как вследствие непрерывности справа от a найдется δ-окрестность в которой $f(x)<0$.Для этого нужно выбрать ε меньше чем $-f(a)$. Следовательно, ξ не может быть равна a.

ξ не может быть равно и b, так как слева от b найдется δ-окрестность в которой $f(x)>0$. Для этого нужно выбрать ε меньше чем $f(b)$.

Убедимся, что $f(\xi)=0$.

Пусть $f(\xi)<0$. Тогда теореме **36**, найдется δ окрестность точки ξ в которой $f(x)<0$, а это значит, что справа от ξ есть точки и которых $f(x)<0$, следовательно, ξ не точная верхняя грань.

Пусть $f(\xi)>0$. Тогда, согласно теореме **36**, найдется δ окрестность точки ξ в которой $f(x)>0$, а это значит, что ξ не точная верхняя грань так как по определению точной верхней грани, какое бы не взять x меньшее ξ должна найтись x' такая что $x<x'<\xi$ в которой $f(x')<0$.
Из этого следует
Теорема 38. Пусть функция $f(x)$ задана и непрерывна на $[a,b]$ и $f(a)=\alpha,\ f(b)=\beta$. Пусть $\alpha<\gamma<\beta$. Тогда найдется ξ такое что $a<\xi<b$ и $f(\xi)=\gamma$.

Теорема 39. (**Первая теорема Вейерштрасса**) Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте [a,b], то она ограничена на этом сегменте.
Доказательство. Пусть $f(x)$ неограниченна на [a,b]. Рассмотрим последовательность натуральных чисел $\{n\}$. Для каждого n найдется $f(x_n)>n$ так как функция неограниченна. Числа x_n образуют последовательность, и она ограничена. Выделим сходящуюся под последовательность x^*_n из x_n следующим образом. Выберем $x^*_n=x_1$ Поделим [a,b] пополам. Если в одной из половин будет конечное число N_1 элементов, то выберем половинку, содержащую бесконечно много элементов, а в ней $x_{N_1+1}=x_2^*$. Если в обеих половинках бесконечно много элементов, то выбираем ту в которой x_2 и берем $x^*_2=x_2$. Далее, делим выбранную половинку пополам и повторяем процедуру. $\{x_n^*\}$ сходится и пусть $\{x_n^*\}$ сходится к $\xi\in[a,b]$. Но последовательность $f(x_n)$ неограниченна и, под последовательность $f(x^*_n)$ в следствие ее построения ($f(x^*_n)>n^*$) также неограниченна. А этого быть не может, так как функция непрерывна и $\lim_{x\to\xi}f(x)=f(\xi)$.
Отметим, что включение концов a и b очень важно − функция $\frac{1}{x}$ непрерывна, но не ограничена на (0,1].
Теорема 40. (**Вторая теорема Вейерштрасса**) Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, то она достигает на этом сегменте своих точных верхних и нижних граней.
Доказательство. В силу **теоремы 39** функция ограничена и, следовательно, точная верхняя грань M существует на $[a,b]$ и предположим, что она недостижима. Тогда $f(x)<M$ на $[a,b]$. Это означает что между множеством значений функции и M существует «щель» и это нужно доказать. Тогда функция $M-f(x)$ не может быть равной нулю. Но в точке экстремума (равна разность нулю или нет) она не обладает ни какой особенностью, а вот функция $F(x)=\frac{1}{M-f(x)}$ которая непрерывна и по первой теореме Вейерштрасса ограничена на $[a,b]$ в случае $M-f(x)=0$ не существует и этим в точке экстремума выделена. То есть $F(x)=\frac{1}{M-f(x)}\ \ A$. Отметим что $\frac{1}{M-f(x)}$ никогда не может быть равной нулю. Следовательно, $M-f(x)\ \ \frac{1}{A}$ и, следовательно, $f(x)\ \ M-\frac{1}{A}$. Это означает что M не точная верхняя грань, что противоречит условию. Аналогично рассматривается точная нижняя грань.

Производная.

Определение 33. Производной называют $\lim_{x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Нужно иметь ввиду, что $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ есть функция от Δx, при фиксированном x. Если предел берется справа, то это правая производная, если слева, то говорят, что это левая производная.

Основные свойства производных (можно рассматривать как задачи на пределы)

1) $\frac{df(x)+\varphi(x)}{dx}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{d\varphi(x)}{dx}$
2) $\frac{d(f(x)\varphi(x))}{dx}=\frac{df(x)}{dx}\varphi(x)+f(x)\frac{\varphi(x)}{dx}$
3) $\frac{d(f(\varphi(x)))}{dx}=\frac{df(\varphi(x))}{d\varphi}\frac{\varphi(x)}{dx}$

Понятие дифференцируемости функции.

Определение 34. Функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой в точке x если приращение функции Δf в этой точке , отвечающей приращению Δx может быть представлена в виде $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$, где A– некоторое число, а $\alpha(\Delta x)$ бесконечно малая функция от Δx $\begin{pmatrix}\alpha(\Delta x)\to 0\\ \Delta x\to 0\end{pmatrix}$.

Теорема 41. Чтобы функция была дифференцируема в точке x необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную.

<u>Доказательство</u>.

<u>Достаточность</u> Пусть $f(x)$ дифференцируема, то есть $\Delta y=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$ $\begin{pmatrix}\alpha(\Delta x)\to 0\\ \Delta x\to 0\end{pmatrix}$ следовательно $\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\alpha(\Delta x)$. Тогда $y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\big(A+\alpha(\Delta x)\big)=\lim_{\Delta x\to 0}(A)+\lim_{\Delta x\to 0}\big(\alpha(\Delta x)\big)=A=y'(x)$.

<u>Необходимость</u>.

Пусть $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$. Обозначим $\alpha(\Delta x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)$. Тогда $\Delta y=f'(x).\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$, а $\lim_{\Delta x\to 0}\big(\alpha(\Delta x)\big)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)\right)=f'(x)-f'(x)=0$ и $\mathrm{A}=f'(x)$

Дифференцируемость и непрерывность.

Теорема 42. Если функция дифференцируема, то она непрерывна. Обратное не всегда верно.

<u>Доказательство</u>. Если функция дифференцируема в точке *x,* то у нее в этой точке существует производная. $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)$, или $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$. Тогда $\lim_{\Delta x\to 0}\big(f(x+\Delta x)-f(x)\big)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f'^{(x)}\Delta x=0$. Следовательно, функция непрерывна.

Понятие дифференциала функции.

Рассмотрим приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где – $A(x)$–некоторая функция, а $\alpha(x, \Delta x)$ − бесконечно малая функция от Δx (то есть $\left(\begin{matrix}\alpha(\Delta x) \to 0 \\ \Delta x \to 0\end{matrix}\right)$).

Определение 35. Величина $A(x)\Delta x$ называется дифференциалом функции $f(x)$, и имеет обозначение $df = A(x)\Delta x = f'(x)\Delta x$.

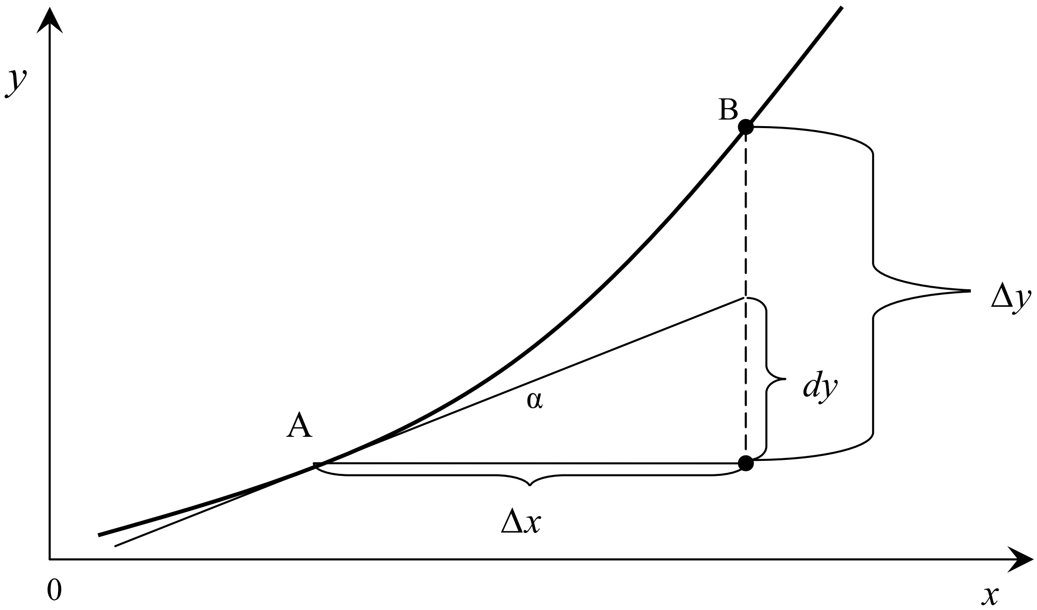


Рис. 20.

Инвариантность формы первого дифференциала.

Найдем dx.

1) Если x независимая переменная то $dx = x'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.

2) Пусть $x = x(t)$. Тогда $\Delta y = f'\big(x(t)\big)_t \Delta t + \alpha(t, \Delta t)\Delta t$. Тогда, по правилу взятия производной от сложной функции, $\Delta y = f'\big(x(t)\big)_x x'(t)\Delta t + \alpha(t, \Delta t)\Delta t$, но $\Delta x = x'(t)\Delta t + \alpha_1(t, \Delta t)\Delta t$ где $\left(\begin{matrix}\alpha(t, \Delta t) \to 0 \\ \Delta t \to 0\end{matrix}\right)$, $\left(\begin{matrix}\alpha_1(t, \Delta t) \to 0 \\ \Delta t \to 0\end{matrix}\right)$ и тогда $x'(t)\Delta t = \Delta x - \alpha_1(t, \Delta t)\Delta t$ и $\Delta y = f'\big(x(t)\big)_x \Delta x - f'\big(x(t)\big)_x \alpha_1(t, \Delta t)\Delta t + \alpha(t, \Delta t)\Delta t = f'\big(x(t)\big)_x \Delta x + \alpha_2(t, \Delta t)\Delta t$, где $\alpha_2(t, \Delta t)\Delta t = -f'\big(x(t)\big)_x \alpha_1(t, \Delta t)\Delta t + \alpha(t, \Delta t)\Delta t$ и, очевидно $\left(\begin{matrix}\alpha_2(t, \Delta t) \to 0 \\ \Delta t \to 0\end{matrix}\right)$. Это означает что $dy = f'_x dx$ независимо от того, является x независимой или зависимой переменной, а запись $f' = \frac{df}{dx}$ обретает не только символический смысл, а является отношением дифференциалов.

Дифференциалы высших порядков.

Введем еще один символ, кроме *d,* для дифференциала δ. Рассмотрим $\delta\big(dy(x)\big) = \delta(y'(x)dx) = (y'(x)dx)'\delta x$.

Определение 36. Значение $\delta\big(dy(x)\big)$ взятое при $\delta x = dx$ называется дифференциалом второго порядка или вторым дифференциалом и обозначается как d^2y.

1) x – независимая переменная то есть Δx не зависит от x.

$\delta(dx) = (dx)'_x\delta x = \{(dx)'_x = 0\} = 0$

$d^2y = \delta\big(dy(x)\big)|_{\delta x=dx} = \delta(y'(x)dx)|_{\delta x=dx} = (y'(x)dx)'\delta x|_{\delta x=dx}$

$= y''(x)dx\delta x|_{\delta x=dx} + y'(x)(dx)'_x\delta x = \{(dx)'_x = 0\} = y''(x)dxdx = y''(x)(dx)^2$

То есть $d^2y(x) = y''(x)(dx)^2 = y''(x)dx^2$.

По индукции $d^ny(x) = y^{(n)}(x)dx^n$

2) Пусть $x(t)$.

$$d^2y = \delta\Big(dy\big(x(t)\big)\Big) = \delta\big(y'_t(x(t)dt)\big) = \big(y'_t\big(x(t)\big)dt\big)'_t\delta t|_{\delta t=dt} =$$

$$= \big(y'_x\big(x(t)\big)x'_t(t)dt\big)'_t\delta t|_{\delta t=dt} =$$

$$= \Big(y'_x\big(x(t)\big)\Big)'_t x'_t(t)dt\delta t|_{\delta t=dt} + y'_x\big(x(t)\big)x''_t(t)dt\delta t|_{\delta t=dt}$$

$$+ y'_x\big(x(t)\big)x'_t(t)(dt)'_t\delta t|_{\delta t=dt} = \{(dt)'_t = 0\} =$$

$$= y''_x\big(x(t)\big)\big(x'_t(t)\big)^2dt\delta t|_{\delta t=dt} + y'_x\big(x(t)\big)x''_t(t)dt\delta t|_{\delta t=dt}$$

$$= y''_x\big(x(t)\big)\big(x'_t(t)\big)^2(dt)^2 + y'_x\big(x(t)\big)x''_t(t)(dt)^2 =$$

$$= y''_x\big(x(t)\big)(x'_t(t)dt)^2 + y'_x\big(x(t)\big)x''_t(t)(dt)^2 = y''_x(dx)^2 + y'_x(x)d^2x$$

Основные теоремы о дифференцируемых функциях.

Определение 37. Будем говорить, что функция $f(x)$ возрастает (убывает) в точке c, если найдется δ окрестность точки c, в которой она возрастает (убывает).

Определение 38. Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет максимум в точке c, если найдется δ окрестность точки c, в которой $f(c)$ имеет максимальное (минимальное) значение. Точка максимума или минимума называется точкой экстремума.

Теорема 43. Если функция дифференцируема в точке c, и $f'(c) > 0$ $(f'(c) < 0)$, то функция возрастает (убывает) в этой точке.

<u>Доказательство</u>. Так как в точке c существует производная, то существует предел $f'(x) = \lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. На основании определения предела по Коши для любого ε найдется δ, такое, что $\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)\right| < \varepsilon$ или

$-\varepsilon < \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c) < \varepsilon$ при $0 < |x - c| < \delta$

$-\varepsilon + f'(c) < \frac{f(x)-f(c)}{x-c} < \varepsilon + f'(c)$. Так как ε любое, то пусть $\varepsilon = f'(c) > 0$. Тогда

$0<\frac{f(x)-f(c)}{x-c}<2f'(c)$. То есть $\begin{matrix} f(x)>f(c) & \text{при } x>c \\ f(x)<f(c) & \text{при } x<c \end{matrix}$ что означает возрастание функции.

Из того, что функция возрастает, не следует, что производная не может быть равной нулю (она может быть равна нулю).

Теорема 44. Если в точке *c* функция дифференцируема, и она имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(c)=0$.

Доказательство. Если в этой точке *c* производная функции положительна или отрицательна, то она возрастает или убывает, согласно доказанной выше теореме. А, так как функция дифференцируема и производная в точке *c* существует, то у нас остается только вариант – производная равна нулю,

Выше доказанные теоремы помогают строить графики функций.

Теорема 45 (Роля). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$ и дифференцируема внутри сегмента и $f(a)=f(b)$. Тогда найдется $\xi\in(a,b)$ такая, что $f'(\xi)=0$.

Доказательство. Так как функция непрерывна, то согласно **теореме 40** (Вейерштрассе) эта функция достигает своего максимального *M* и минимального значения *m* на $[a,b]$.

1) Если *M* =*m*, то $f(x)$ постоянная и, следовательно, $f'(x)$ везде на $[a,b]$.

2) Если *M*>*m,* то в точке *x*, в которой функция достигает локального максимума $f'^{(x)}=0$.

Теорема 4 (Лагранжа). Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$.и дифференцируема внутри сегмента. Тогда найдется $\xi\in(a,b)$ такая, что $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

Доказательство. Построим функцию $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ (см. рис. 21).

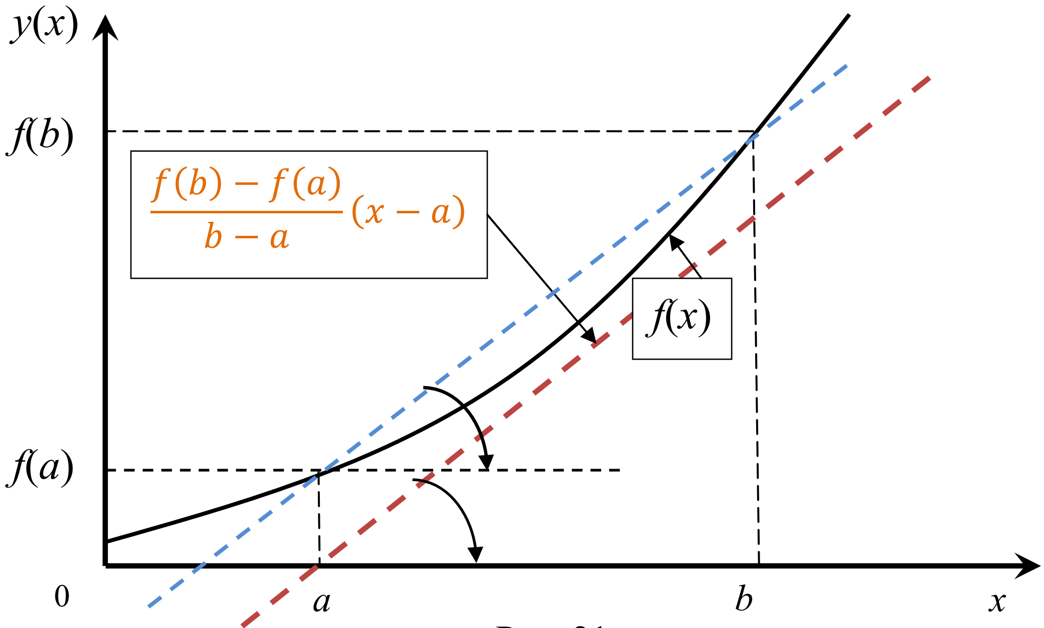


Рис. 21.

$F(a) = F(b) = f(a)$, $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Тогда согласно теореме **43** найдется $\xi \in (a,b)$ такая, что $F'(\xi) = 0$, то есть $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

Следствия из формулы Лагранжа.

Теорема 47. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и на нем же $f'(x) = 0$ то функция на (a,b) постоянна.
Доказательство. Пусть x и $x_0 \in (a,b)$. Тогда найдется $\xi \in (x_0, x)$ такая, что $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$, но $f'(\xi) = 0$, а это значит что $f(x) - f(x_0) = 0$.

Теорема 48. Чтобы дифференцируемая функция на интервале (a,b) не убывала (не возрастала) необходимо и достаточно что бы производная была не отрицательной (не положительной).
Доказательство. Достаточность Пусть $f'(x)\ \ 0$ $(f'(x)\ \ 0)$ для $x \in (a.b)$. Тогда $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ где $a < x_1 < \xi < x_2 < b$ и $f'(\xi)\ \ 0$ $(f'(\xi)\ \ 0)$.
Следовательно $f(x_2) - f(x_1)\ \ 0$ $(f(x_2) - f(x_1)\ \ 0)$.
Необходимость. Пусть $f(x_2) - f(x_1)\ \ 0$ $(f(x_2) - f(x_1)\ \ 0)$ для $x_1, x_2 \in (a,b)$. Это означает, что она не убывает (не возрастает), в любой точке интервала, и, следовательно, производная не может быть отрицательной (положительной), так как если бы она была отрицательной (положительной), то в следствии теоремы **43** она бы убывала (возрастала).

Теорема 49. Чтобы функция возрастала (убывала) на (a,b), достаточно чтобы $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$на (a,b).
Доказательство. Пусть $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для $x \in (a,b)$. Тогда $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ где $a < x_1 < \xi < x_2 < b$ и $f'(\xi) > 0$ $(f'(\xi) < 0)$.
Следовательно $f(x_2) - f(x_1) > 0$ $(f(x_2) - f(x_1) < 0)$.
Замечание: функция может возрастать, а производная равняться нулю ($y = x^3$).

Обобщенная формула конечных приращений.

Теорема 50. (Коши) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ функции непрерывные на $[a,b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках и $g'(x) \neq 0$ внутри сегмента, то найдется $\xi \in (a,b)$ такая, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.
Доказательство.

Докажем, что $g(b) - g(a) \neq 0$. Пусть это не так и $g(b) - g(a) = 0$, тогда по теореме Роля найдется $\xi \in (a,b)$ такая, что $g(b) - g(a) = g'(\xi)(b-a) = 0$. Следовательно, $g'(x) = 0$, что противоречит условию.

Рассмотрим $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x) - g(a)\big)$ (см. рис. 22). Тогда $F(a) = F(b) = 0$ и $F(x)$ - дифференцируема. Тогда по теореме Роля найдется $\xi \in (a,b)$,

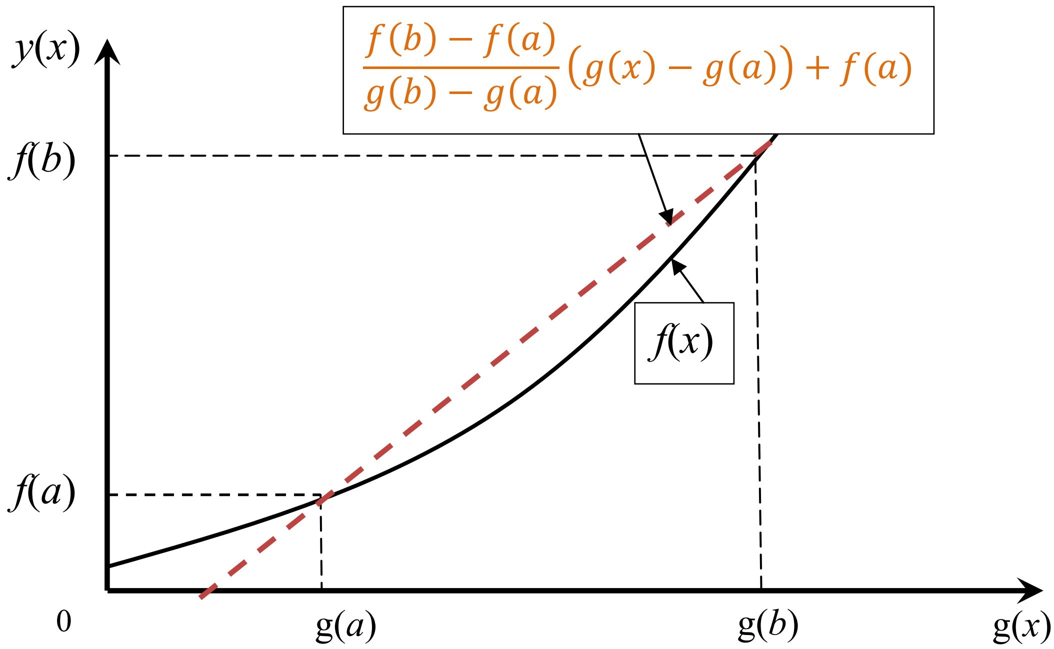


Рис. 22.

такая что $F'(\xi)=0$. Следовательно $F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0$, из равенства нулю следует $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Правила Лопиталя.

Теорема 51. Пусть имеется проколотая δ- окрестность точки a в которой функции $f(x)$ и $g(x)$ определенны и дифференцируемы, а также $g'(x)\neq 0$ в этой окрестности.

Пусть $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to b} g(x)=0$ ($\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to b} g(x)=\infty$ – второй случай).

Тогда, если существует предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Теорема справедлива и для случая $(a,a+\delta)$, $x\to a+0$; $\big((a-\delta,a)\ x\to a-0\big)$.

Доказательство (для первого случая). Доопределим наши функции в точке a $f(a)=g(a)=0$. Выберем $x_n\to a$. Тогда в силу **теоремы 50** Коши справедливо: $\frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$ где $\xi_n\in(x_n,a)$ (или $\xi_n\in(a,x_n)$). Учитывая что $f(a)=$ $=g(a)=0$ получим $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$. Так как последовательность $x_n\to a$ и $\xi_n\in(x_n,a)$ то, по теореме о двух милиционерах для $\{x_n\}$, $\{\xi_n\}$ и $\{a\}$ имеем $\xi_n\to a$. В силу $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$. и существования $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ следует что $\lim_{x_n\to a}\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$ существует и $\lim_{x_n\to a}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\lim_{\xi_n\to a}\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$, а вследствие произвольности последовательности $x_n\to a$ по определению предела функции по Гейне получим, что предел $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ существует и $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Замечание 1. Так как последовательность $\{\xi_n\}$ не является произвольной, то предел $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ может существовать, а предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ нет.

<u>Пример:</u> $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x+1}=0$, но предела, выражения при $x\to 0$, получаемого после применения правила $\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{1}$ не существует.

Замечание 2. Если $f'(x)$ и $g'(x)$ непрерывны в точке a, то $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=$ $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Замечание 3. Правило Лопиталя можно применять несколько раз.

Ряд Тейлора.

Формула Тейлора. Если функция в ε окрестности точки x_0 $|x_0-x|<\varepsilon$ и ней самой имеет n+1 производных и точка x принадлежит этой окрестности то $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o\big((x-x_0)^{(n)}\big)$ где $\lim\limits_{x\to a}\frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}=0$. Это соотношение называется <u>*формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пиано*</u>.

Если обозначить $\Delta x(x,x_0)=x-x_0$ (иногда вместо Δx пишут h) эту формулу записывают в виде:

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2!}f''(x_0)(\Delta x)^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n+o((\Delta x)^n)$.

Если $x_0=0$ и Δx заменить на x, то формула Тейлора называется формулой Маклорена:

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+o(x^n)$

<u>Докажем</u> формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пиано.

Значение функции в точке x представим в приближенном виде: $f(x)\approx p(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$. Следовательно, при $x=x_0$ имеем $f(x_0)=p(x_0)=a_0$. Потребуем равенство производных в точке x_0, то есть при $x-x_0=0$.

$f'(x_0)=p'(x_0)=a_1+a_2\cdot 2\cdot(x-x_0)+\cdots+a_n n(x-x_0)^{n-1}|_{x=x_0}=a_1$

$f''(x_0)=p''(x_0)=2a_2+a_3 3\cdot 2\cdot(x-x_0)+\cdots+a_n n(n-1)(x-x_0)^{n-2}|_{x=x_0}=2a_2$

………………………………………………………

$f^{(n)}(x_0)=p^{(n)}(x_0)=a_n\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1|_{x=x_0}=n!\,a_n$.

Тогда $a_0=f(x_0)$, $a_1=f'(x_0)$, $a_2=\frac{f''(x_0)}{2}$,…, $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$,

Введем функцию

$R_n(x,x_0)=f(x)-[\,f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,]$

Докажем что, $\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x,x_0)}{(x-x_0)^n}=0$.

Из определения $R_n(x)$ следует что $\frac{d^k}{dx^k}R_n(x,x_0)|_{x\to x_0}=0,\ \ 0\le k\le n,$

Лемма. Докажем общее утверждение: если $\varphi(x)$ − непрерывная функция и обладает следующим свойством

$\varphi(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{d^2(x)}{dx^2} = \cdots = \frac{d^k\varphi(x)}{dx^k}$=0, то $\varphi(x+h) = o(h^k)$,

Доказательство.

$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \varphi'(x) = 0$ $-$ следует из определения производной.

Следующие равенства используют теорему Лагранжа **42**.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x\,)}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x\,)}{h}\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi'(x+c_1)h}{h}\frac{1}{h} =$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ c_1\to 0}}\frac{\varphi'(x+c_1)}{h} =$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ c_1\to 0}}\frac{\varphi'(x+c_1)-\varphi'(x)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ c_2\to 0}}\frac{\varphi''(x+c_2)c_1`}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ c_2\to 0}}\frac{\varphi''(x+c_2)c_1`}{h} \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ c_2\to 0}}\varphi''(x+c_2) = 0$$

…………………………………………………………………………………..

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)}{h^n} = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h^n} = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\frac{1}{h^{n-1}} =$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ c_1\to 0}}\frac{\varphi'(x+c_1)h}{h}\frac{1}{h^{n-1}} = \lim_{\substack{h\to 0\\ c_1\to 0}}\frac{\varphi'(x+c_1)}{h}\frac{1}{h^{n-2}} = \lim_{\substack{h\to 0\\ c_1\to 0}}\frac{\varphi'(x+c_1)-\varphi(x)'}{h}\frac{1}{h^{n-2}} =$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ c_2\to 0}}\frac{\varphi''(x+c_2)c_1}{h}\frac{1}{h^{n-2}} \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ c_2\to 0}}\frac{\varphi''(x+c_2)}{h^{n-2}} =$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ c_2\to 0}}\frac{\varphi''(x+c_2)-\varphi''(x)}{h}\frac{1}{h^{n-3}} = \lim_{\substack{h\to 0\\ c_3\to 0}}\frac{\varphi'''(x+c_3)c_2}{h}\frac{1}{h^{n-3}} \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ c_3\to 0}}\frac{\varphi'''(x+c_3)c_2}{h^{n-3}} \ldots$$

$$\ldots \lim_{\substack{h\to 0\\ c_n\to 0}}\varphi^{(n)}(x+c_n) = \varphi^{(n)}(x) = 0 \text{ где } c_n \;\; c_{n-1} \;\; \cdots \;\; c_1 \;\; h.$$

Так как $R_n(x)$ в точке x_0 обладает всеми свойствами функции $\varphi(x)$, то $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$.

Остаточный член в формуле Тейлора в форме Лагранжа.

Выше было показано, что остаточный член имеет малость более высокого порядка чем Δx^n. Предположим что что этот порядок Δx^{n+1} и постараемся определить множитель при Δx^{n+1}. Для этого поделим функцию $R_n(x)$ на функцию Δx^{n+1} и рассмотрим их отношение. Эти функции обладают свойствами $\frac{d^k}{dx^k}R_n(x,x_0)|_{x\to x_0} = 0,\;\; 0\le k\le n$, (см. выше) и $\frac{d^k}{dx^k}\big(\Delta x(x,x_0)\big)^n = \frac{d^k}{dx^k}(x-x_0)^n|_{x\to x_0} = 0,\;\; 0\le k\le n+1$.

Теперь применим к этому отношению теорему Коши (**50**):

$$\frac{R_n(x,x_0)}{\big(\Delta x(x,x_0)\big)^{n+1}} = \frac{R_n(x,x_0)-R_n(x_0,x_0)}{\big(\Delta x(x,x_0)\big)^{n+1}-\big(\Delta x(x_0,x_0)\big)^{n+1}} =$$

$$= \frac{R'_n(c_1,x_0)}{(n+1)\big(\Delta x(c_1,x_0)\big)^n} = \frac{R'_n(c_1,x_0)-R'_n(x_0,x_0)}{(n+1)\big[\big(\Delta x(c_1,x_0)\big)^n-\big(\Delta x(x_0,x_0)\big)^n\big]} =$$

$= \frac{R''_n(c_2, x_0)}{n(n+1)(\Delta x(c_2, x_0))^{n-1}} = \cdots = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1}, x_0)}{(n+1)!}$. Тогда получаем что $R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1}, x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}|_{x \to x_0}$.где $c_{n+1} \in [x_0, x]$.

Докажем однозначность разложения.
Если их два, то
$f(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \cdots + A_n(x - x_0)^n + o_a((x - x_0)^n)$
$f(x) = B_0 + B_1(x - x_0) + B_2(x - x_0)^2 + \cdots + B_n(x - x_0)^n + o_b((x - x_0)^n)$
следовательно,
$A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \cdots + A_n(x - x_0)^n + o_a((x - x_0)^n) =$
$= B_0 + B_1(x - x_0) + B_2(x - x_0)^2 + \cdots + B_n(x - x_0)^n + o_b((x - x_0)^n)$
При $x - x_0 = 0$ получим что $A_0 = B_0$.
Возьмем производную от право и левой части равенства и положим $x - x_0 \to 0$. Тогда $A_1 = B_1$ (производная от $o_a\left((x - x_0)^{(n)}\right)$ есть производная от $R_n(x)$ и она, как легко видеть, равна нулю при $x - x_0 \to 0$) и т. д..

Графики функций.

1. Первое что нужно сделать при построении графика функции − это найти область определения функции, точки пересечения с осями координат, если это возможно. Найти интервалы знакопостоянства функции.
2. Исследовать функцию на четность и периодичность.
3. Далее мы находим особые точки − это и точки разрыва функции и точки в которых меняется аналитический вид функции. Число таких точек обычно конечно. Поэтому в настоящем параграфе мы будем рассматривать участки оси абсцисс, на которых функция непрерывна и дифференцируема.
4. Исследование правых и левых пределов в этих особых точках. Ищем вертикальные асимптоты.
5. Ищем горизонтальные асимптоты в виде $y = kx + b$. Где $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ $b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$
6. Ищем стационарные точки: то есть точки в которых $\frac{df}{dx} = 0$ (Они являются кандидатами на точки экстремума. Это следует из теоремы **43** которая гласит, что если экстремум непрерывной и дифференцируемой в точке функции есть, то производная в этой точке равна нулю) и области знакопостоянства производной.
7. Из теоремы **43** о связи знака производной функции с ее поведением, следует, что на участках, где производная положительна − она возрастает, а где отрицательна − убывает.
8. Определение **37** возрастающей (убывающей) в точке функции позволяет утверждать, что для наличия экстремума в точке непрерывной функции необходимо и достаточно изменение возрастания на убывание (или наоборот) в этой точке. Если учесть теорему **43,** то для наличия экстремума достаточно наличия смены знака производной и непрерывности функции.
9. Ищем области выпуклости и вогнутости графика функции.

Будем говорить, что функция выпуклая в точке x_0, если найдется такая δ окрестность точки x_0, что в ней касательная, поведенная в точке x_0, будет выше функции. То есть, $\left[\frac{df(x)}{dx}(x-x_0)+f(x_0)\right]-f(x)>0$. Если касательная расположена ниже функции в δ окрестности, то говорят, что функция вогнутая.

Запишем тождество $0=f(x)-f(x)=f(x)-\left[f(x_0)+\frac{df(x_0)}{dx}(x-x_0)+\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)\right]$. Следовательно, $\left[f(x_0)+\frac{df(x_0)}{dx}(x-x_0)\right]-f(x)=-\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}(x-x_0)^2-o((x-x_0)^2)$. Из этого выражения следует вывод о том, что если в точке x_0 вторая производная отрицательна, то функция в этой точке выпуклая, а если положительная, то вогнутая. В случае равенства нулю второй производной нужно продолжить разложение в ряд Тейлора проводить дальнейшие исследования.

Примечание: Из последней формулы пункта **9** следует, что если $\left[\frac{df(x_0)}{dx}=0\right]$, то. $f(x_0)-f(x)=-\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}(x-x_0)^2-o((x-x_0)^2)$. Это выражение означает, что у точки x_0 найдется δ окрестность в которой $f(x)$ имеет локальный максимум.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Первообразная функции и неопределенный интеграл.

Определение 38. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на (a,b) если $F'(x)$ существует и $F'(x)=f(x)$.

Теорема 51. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ первообразные функции $f(x)$ на (a,b), то $F_1(x)–F_2(x)$ = const.

<u>Доказательство</u>:

Рассмотрим $Ф(x)= F_1(x)–F_2(x)$. Тогда $Ф'(x)= F_1'(x)-F'_2(x)= f(x)-f(x)=0$. А по теореме **47** если производная функции равна нулю, на (a,b), то эта функция на (a,b) постоянна.

Определение 39. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается как $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Где $F(x)$ одна из первообразных, а С это множество действительных чисел.

Основные свойства неопределенных интегралов.

1) $\boldsymbol{d}\int f(x)dx = f(x)\boldsymbol{dx}$. (дифференциал «уничтожает» интеграл).

Замечание: жирное $\boldsymbol{d}$ – это «реальный» дифференциал, а не жирное d − это символ в неопределенном интеграле.

<u>Доказательство</u>

$\boldsymbol{d}\int f(x)dx =$ {используя определение дифференциала} $= (\int f(x)dx)'\boldsymbol{dx} =$
$((F(x) + C)'\boldsymbol{dx} =$
{используя определения первообразной и неопредленного интеграла} $=$
$= f(x)\boldsymbol{dx}$

2) $\int(\boldsymbol{d}(f(x)))\, dx = f(x)\boldsymbol{dx} + C$ («интеграл уничтожает» дифференциал).

<u>Доказательство</u>.

$\int(\boldsymbol{d}(f(x)))\, dx =$ {используя определение дифференциала} $= \int(f'(x)\boldsymbol{dx})dx =$ $\{\boldsymbol{dx}$ − число$\} = \int(f(x)\boldsymbol{dx})'dx =$ {используя определение первообразной } $=$
$= f(x)\boldsymbol{dx} + C$

3) $\int(f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

<u>Смысл равенства:</u>

Для любой первообразной $\Phi(x)$ функции $(f(x) + g(x))$ найдется пара первообразных $F(x)$ и $G(x)$ функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, таких, что $\Phi(x) = F(x) + G(x)$ и наоборот: для любой пары первообразных $F(x)$ и $G(x)$ функций $f(x)$ и $g(x)$ найдется такая первообразная $\Phi(x)$ функции $(f(x) + g(x))$, что $F(x) + G(x) = \Phi(x)$.

<u>Доказательство</u>.

Докажем, что $\int(f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Пусть $\int(f(x) + g(x))dx = \Phi(x) + C$, тогда $\Phi' = (f(x) + g(x))$ по определению первообразной. Множество $\int f(x)dx + \int g(x)dx$ образуется путем сложения каждого члена первого множества с каждым членом другого множества. Для нас это есть сумма первообразных $F(x)+C_1$ и $G(x)+C_2$ функций $f(x)$ и $g(x)$, то есть это числа вида $F(x) + G(x) + C$. Найдем первообразными какой функции являются члены этого множества. Для этого вычислим производную функции

$F(x)+G(x)+C$. $(F(x)+G(x)+C)'=f(x)+g(x)$. Это означает, что оба множества являются множеством всех первообразных одной и той же функции, то есть они совпадают.

4) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$**.**

Доказательство. Пусть $\int Af(x)dx = G(x)+C$ где $G(x)'=Af(x)$ согласно определению первообразной. Множество $A\int f(x)dx$ образуется путем умножения каждого члена множества $\Phi(x)+C$ на A. где $\Phi(x)'=f(x)$. Найдем первообразными какой функции являются члены этого множества.

$(A(\Phi(x)+C))'=Af(x)$. Это означает, что оба множества являются множеством всех первообразных одной и той же функции, то есть они совпадают.

Замечание: $\int f(x)dx+\int g(x)dx = F(x)+C+G(x)+C = F(x)+G(x)+C = F(x)+\int g(x)dx$. то есть

$\int f(x)dx+\int g(x)dx = F(x)+\int g(x)dx$

В этом равенстве $\int g(x)dx$ сокращать **нельзя**, так как это будет переход от множественного соотношения к численном и можно получить неверные соотношения.

Например: $\int xdx = \int (x+0)dx = \int xdx + \int 0dx = \int xdx + 5 \to 0 = 5$

Что неверно.

Основные методы интегрирования.

Теорема 52 (замена переменной). Пусть $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на $[a,b]$ и пусть $\int g(t)dt = G(t)+C$ на $[a,b]$. Тогда $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x))+C$.

Доказательство. $\left(\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx\right)' = g(\varphi(x))\varphi'(x)$. С другой стороны, $G(\varphi(x))' = g(\varphi(x))\varphi'(x)$ Таким образом, правая и левая части равенства являются множествами первообразных одной и той же функции.

Замечание. После доказательства этой теоремы и учитывая свойства 1 и 2 неопределенного интеграла мы можем говорить, что с символом d в неопределенном интеграле можно работать как с реальным дифференциалом.

Теорема 53 (интегрирование по частям). Пусть $v(x)$ и $u(x)$ существуют и дифференцируемы, а также существует первообразная функции $u'(x)v(x)$, тогда $\int u(x)v'(x)$ существует и $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$.

Доказательство. Возьмем производную от правой части (от любой первообразной) и получим $u(x)v'(x)$. Возьмем производную от левой части (от любой первообразной) и получим $u'(x)v(x)+u(x)v'(x)-u'(x)v(x)=u(x)v'(x)$. Таким образом, правая и левая части равенства являются множествами первообразных одной и той же функции.

Определенный интеграл Римана.

Определение 40. Говорят, что задано разбиение сегмента $[a, b\,]$, если заданы $x_0, x_1, .. x_k \dots x_n$ такие, что $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_k < \cdots < x_n = b$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Будем его обозначать как $\{x_{d,n}\}$, где $d = \max(\Delta x_k)$ называется диаметром разбиения.

Разбиение $\{x_{d',n'}\}$ сегмента $[a, b\,]$ называется измельчением разбиения $\{x_{d,n}\}$ сегмента, если каждая точка разбиения $\{x_{d,n}\}$ совпадает с точками разбиения $\{x_{d',n'}\}$, но в нем имеются еще дополнительные точки.

Разбиение $\{x_{d'',n''}\}$ сегмента $[a, b\,]$ называется объединением разбиений $\{x_{d,n}\}$ и $\{x_{d',n'}\}$, если каждая точка x''_k совпадает с x_k или x'_k.

Пусть на сегменте $[a,b]$ задана функция $f(x)$. Назовем интегрально суммой сумму вида:

$\sigma(\{x_{d,n}\}, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = \sigma(\{x_{d,n}\}, \xi_n)$=$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, $\qquad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

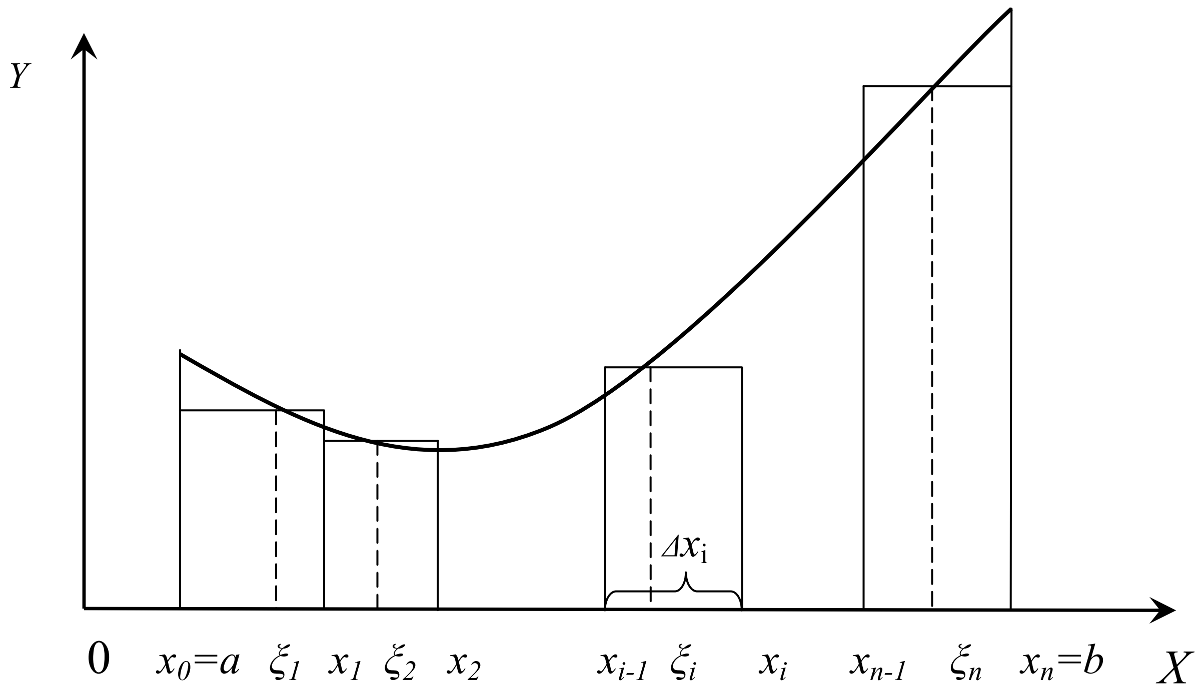


Рис. 21.

Определение 41. Число I называется пределом интегральных сумм $\sigma(\{x_{d,n}\}, \xi_n)$ при стремлении диаметров d последовательности разбиений $\{x_{d,n}\}$ к нулю, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, что при условии $d < \delta$ и при любом выборе точек ξ_i следует $|I - \sigma(\{x_{d,n}\}, \xi_n)| < \varepsilon$. Что записывается как $\lim_{d\to 0} \sigma(\{x_{d,n}\}, \xi_n) = I$.

Определение 42. Функция называется интегрируемой по Риману на сегменте, $[a, b\,]$, если для этой функции на этом сегменте существует предел ее интегральных сумм.

$I = \int_a^b f(x)dx$.

Теорема 54. Если функция неограниченна на $[a, b\,]$, то она не интегрируема на

$[a, b\ ]$.

Доказательство. Пусть $f(x) > 0$ и $f(x) \to \infty$ при $x \to c \subset [a, b]$. Точка c обязательно принадлежит какому то интервалу $[x_{i-1}, x_i]$. Выберем сколь угодно большое число A>0. В силу $f(x) \to \infty$ при $x \to c \subset [a, b]$ в окрестности точки c всегда найдется точка ξ такая, что $f(\xi) > \frac{A}{d_{min}}$, где $d_{min} = min\Delta x_i$. Очевидно, что $\sigma(\{x_{d,n}\}, \xi_n)$=$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i > A$. То есть сходимости интегральных сумм нет.

Верхние и нижние суммы.

Определение 43. Пусть $f(x)$ определена и ограничена на $[a, b\ ]$ и пусть
$m_k = \inf f(x)$ (точная нижняя грань $f(x)$ при $x \subset [x_{k-1}, x_k]$,
а $M_k = \sup f(x)$ (точная верхняя грань $f(x)$ при $x \subset [x_{k-1}, x_k]$).
Тогда будем называть
$S_{d,n} = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \cdots + M_n\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k -$ верхней суммой (Дарбу), а
$s_{d,n} = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \cdots + m_n\Delta n = \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k -$ нижней суммой (Дарбу).

Замечание. Введение верхних и нижних сумм Дарбу, а в дальнейшем и интегралов Дарбу избавляет нас от зависимости, связанной с выбором точек ξ_i.

Из определения верхней и нижней суммы следует:

Теорема 55. Если задано разбиение $\{x_{d,n}\}$ то для него $s_{d,n} \le \sigma(\{x_{d,n}\}, \xi_n) \le S_{d,n}$, что очевидно, а $s_{d,n}$ и $S_{d,n}$, есть точные нижние и верхние грани для интегральных сумм σ с одними и теми же точками разбиения x_i, но разными точками ξ_i.

Доказательство. Напомним, что точной верхней (нижней) гранью для какого-либо множества называется число, в левой (правой) ε окрестности которого всегда найдется хоть один член нашего множества.

Выберем ε. Рассмотрим $S_{d,n} - \sigma(\{x_{d,n}\}, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - f(\xi_i))\Delta x_i$ и выберем ξ_i так, чтобы $M_i - f(\xi_i) < \frac{\varepsilon}{n\Delta x_i}$, это возможно, так как функция f непрерывна, тогда $S_{d,n} - \sigma(\{x_{d,n}\}, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - f(\xi_i))\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$.

Теорема 56. При измельчении разбиения верхняя сумма не увеличиваться, а нижняя не уменьшаться.

Доказательство. Пусть отрезок $[x_{k-1}, x_k]$ «измельчился» на отрезки $[x_{k-1}, x'_k]$ и $[x'_k, x_k]$. Тогда «старый» максимум останется максимумом для одного из новых отрезков, а максимум для другого отрезка $M' \le M$, так как точка, в которой $f(x) = M'$ принадлежит исходному отрезку $[x_{k-1}, x_k]$:
$M(x_k - x_{k-1}) = M(x_k - x'_{k-1}) + M(x'_k - x_{k-1}) \le M(x_k - x'_k) + M'(x'_k - x_{k-1})$.
(См. рисунок).

Аналогично доказывается и для минимумов. «старый» минимум останется минимумом для одного из новых отрезков, а минимум для другого отрезка $m' \ge m$, так как точка, в которой $f(x) = m'$, принадлежит исходному отрезку:
$m(x_k - x_{k-1}) = m(x_k - x'_{k-1}) + m(x'_k - x_{k-1}) \ge m'(x_k - x'_k) + m(x'_k - x_{k-1})$.

Теорема 57. Для двух произвольных разбиений нижняя сумма одного не превосходит верхней суммы другого.

Доказательство. Пусть $\{x_{d',n'}\}$ и $\{x_{d'',n''}\}$ два разных разбиения. Пусть $\{x_{d,n}\}$ есть их объединение, а $s_{d,n}$, $s_{d',n'}$, $s_{d''n''}$, $S_{d,n}$, $S_{d',n'}$, $S_{d''n''}$, соответственно их нижние и верхние суммы.

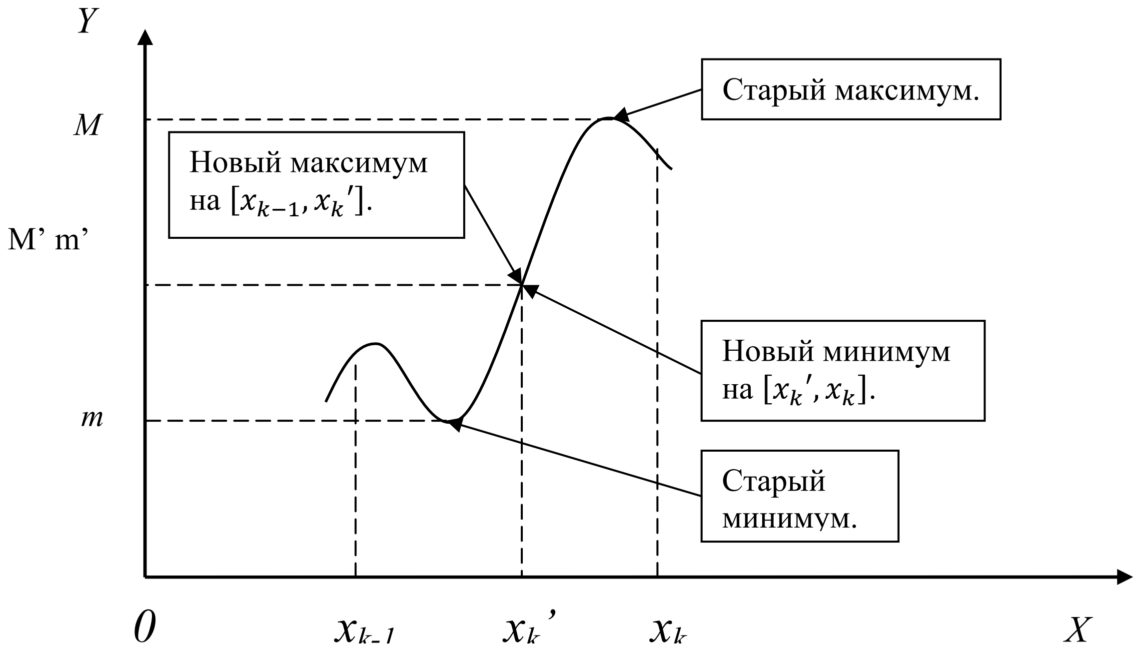


Рис. 22.

Согласно предыдущей теореме **56** $s_{d',n'}$, $s_{d''n''} \le s_{d,n}$; $S_{d,n} \le S_{d',n'}$, $S_{d''n''}$. Но $s_{d,n} \le S_{d,n}$, следовательно $s_{d',n'}$, $s_{d''n''} \le s_{d,n} \le S_{d,n} \le S_{d',n'}$, $S_{d''n''}$. Тогда $s_{d',n'}$, $s_{d''n''} \le S_{d',n'}$, $S_{d''n''}$ и, следовательно, $s_{d',n'}, \le S_{d''n''}$, это означает что теорема доказана.

Определение 44. **Верхним интегралом Дарбу** функции $f(x)$ называется число I^* равное точной нижней грани множества верхних сумм S функции $f(x)$ для всевозможных разбиений сегмента $[a, b\,]$.

Определение 45. **Нижним интегралом Дарбу** функции $f(x)$ называется число I_* равное точной верхней грани множества нижним сумм s функции $f(x)$ для всевозможных разбиений сегмента $[a, b\,]$.

Теорема 58. Нижний интеграл Дарбу не превосходит верхний интеграл Дарбу, то есть $s_{d,n} \le I_* \le I^* \le S_{d'n'}$.

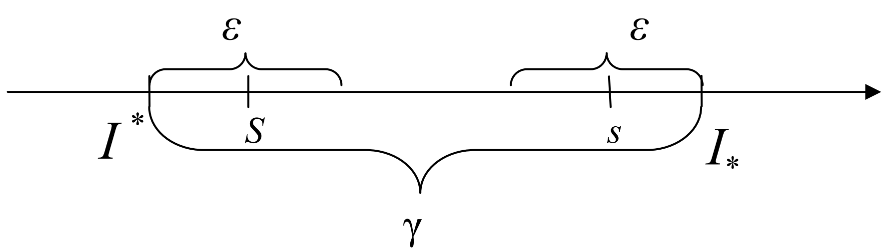


Рис. 22.

Доказательство. Пусть это не так и $I_* > I^*$ (то есть $I_* - I^* < 0$). Тогда существует щель $I_* - I^* = \gamma > 0$. Выберем ε так, что $\gamma - 2\varepsilon > 0$. Согласно **определениям 3,**

43 и 44 для точной нижней грани и точной верхней грани найдутся такие $S_{d'n'}$ и $s_{d,n}$ что $S_{d'n'} < I^* + \varepsilon$ и $s_{d,n} > I_*$.

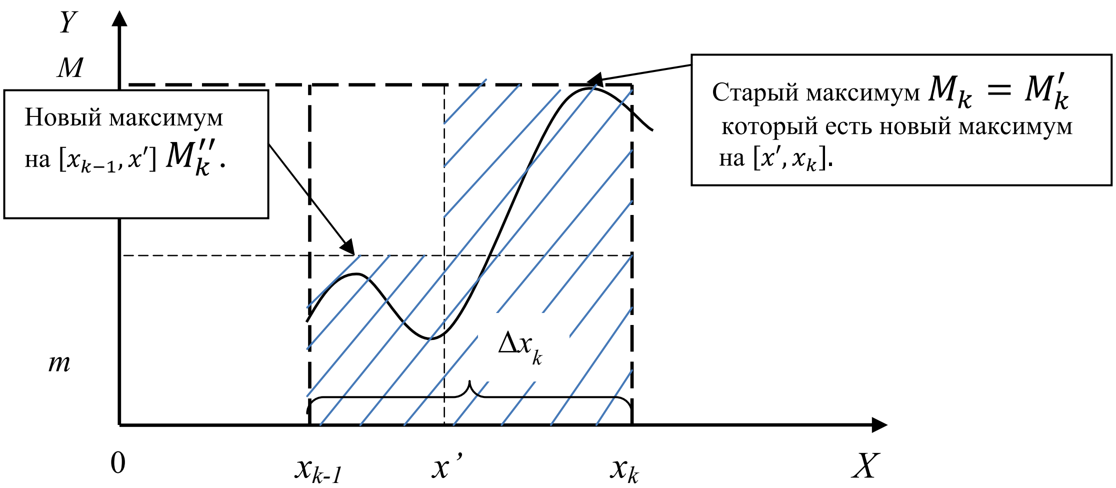
Тогда (опускаем нижние индексы, так как они не важны) $\begin{cases} S < I^* + \varepsilon \\ s > I_* - \varepsilon \end{cases}$

$\Rightarrow S - s < I^* + \varepsilon - I_* + \varepsilon = I^* - I_* + 2\varepsilon = -\gamma + 2\varepsilon < 0$, то есть, $S - s < 0$ что противоречит **теореме 57**.

Определение 46. Число A называется пределом верхних сумм $S_{d,n}$ при стремлении к нулю диаметра разбиений d если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при всех $d < \delta$, выполняется $\left|S_{d,n} - A\right| < \varepsilon$. ($\lim_{d\to 0} S = A$.).
Аналогично определяется предел нижних сумм.

Теорема 59. (Лемма Дарбу) Верхний интеграл Дарбу I^* является пределом верхних
сумм Дарбу, а нижний интеграл Дарбу I_* пределом нижних сумм Дарбу.
Замечание. Стремление диаметра разбиений к нулю приводит к увеличению числа точек разбиения. Если зафиксировать число отрезков разбиения, то до бесконечности уменьшать диаметр разбиения нельзя так как $d_{\ min} = \frac{b-a}{n}$.
В случае если $f(x) = const$ теорема очевидна.
Лемма. Оценим, что произойдет с верхней суммой Дарбу, если к данному разбиению на n отрезков добавить еще одну точку разбиения.

На данном отрезке $[a, b]$ ограниченная функция (иначе она не интегрируема) имеет точную верхнюю грань M и точную нижнюю грань m. Пусть добавленная точка x' принадлежит отрезку $[x_{k-1}, x_k]$ на котором функция имеет точную верхнюю грань M_k. Тогда $S_{d,n} - S_{d',n+1} = M_k \Delta x_k - [M_k'(x' - x_{k-1}) + M_k''(x_k -$ $x' ≤ M\Delta xk - mx' - xk - 1 + mxk - x' = (M - m)\Delta xk ≤ (M - m)d$. Где Mk' и Mk'' новые точные верхние грани на новообразованных отрезках.



Проиллюстрируем этот вывод рисунком:

Рис. 23.

Тогда разность $S_{d,n} - S_{d',n+1}$ есть площадь прямоугольника, ограниченного жирным пунктиром, минус площадь заштрихованной фигуры, то есть $S_{d,n} - S_{d',n+1} = M_k(x_k - x_{k-1}) - [M_k'(x' - x_{k-1}) + M_k''(x_k - x')]$

Добавляя j точек получим соотношения:

$$S_{d,n} - S_{d',n+1} \leq (M-m)d$$
$$S_{d',n+1} - S_{d'',n+2} \leq (M-m)d$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$
$$S_{d''',n+j-1} - S_{d'',n+j} \leq (M-m)d$$

Складывая эти неравенства получим : $S_{d,n} - S_{d'''',n+j} \leq j(M-m)d$

<u>Доказательство</u>. Выберем ε. Рассмотрим $S_d - I^*$ и будем искать d такое, что $S_d - I^* < \varepsilon$ для всех разбиений у которых диаметры разбиений маньше d.

1) Сначала найдем какое ни будь разбиение с таким d'' и числом точек разбиения j, что $S_{d'',j+1} - I^* < {}^{\varepsilon}/_{2}$. (в индексе S стоит $j+1-$ число отрезков разбиения, величина значения d'' не важно). Возможность существования такого разбиения следует из определения **43** для I^* как точной нижней грани множества верхних сумм.

2) Рассмотрим такое разбиение, что его диаметр $d < \frac{\varepsilon}{2j(M-m)}$, а число точек разбиения равно i (это и есть искомый диаметр), а его верхняя сумма равна $S_{d,i}$. Добавим это разбиение, содержащее i точек разбиения с диаметром d, в разбиение с диаметром d'' и числом точек разбиения j из пункта 1). Получим новое разбиение с новым диаметром разбиения d' и новой верхней суммой $S_{d',i+j}$. Поскольку это разбиение является измельчением разбиения из пункта 1), то из теоремы **56** и $S_{d'',j+1} - I^* < {}^{\varepsilon}/_{2}$ следует $S_{d',i+j} - I^* < {}^{\varepsilon}/_{2}$

Учитывая это соотношение и соотношение $S_{d,n} - S_{d',n+j} \leq j(M-m)d = {}^{\varepsilon}/_{2}$ полученное в лемме рассмотрим $S_{d,i} - I^* = (S_{d,i} - S_{d',i+j}) + S_{d',i+j} - I^* < {}^{\varepsilon}/_{2} + {}^{\varepsilon}/_{2} = \varepsilon$. Этому соотношению удовлетворяют все верхние суммы с $d < \frac{\varepsilon}{2j(M-m)}$

Что и требовалось доказать.

Теоремы о необходимых и достаточных условиях существования определенного интеграла Римана.

Теорема 60. **(критерий Римана).** (основная теорема по Ильину). Для существования определенного интеграла Римана необходимо и достаточно чтобы $\lim_{d\to 0}(S_{d,n} - s_{d,n}) = 0$, где $S_{d,n}$ - верхняя сумма функции $f(x)$, а $s_{d,n}$ – нижняя сумма функции $f(x)$, для разбиения с диаметром разбиения d.

<u>Необходимость</u>. (Из существования интеграла Римана $\to \lim_{d\to 0}(S_{d,n} - s_{d,n}) = 0$.

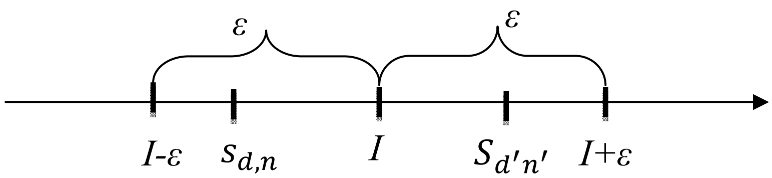
Замечание. В терминах ε и δ существования определенного интеграла Римана означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$, такое, что для любого разбиения $\{x_{d,n}\}$. при условии $d < \delta$ (d – диаметр этого любого разбиения) при любом выборе точек ξ_i следует $|I - \sigma(\{x_{d,n}\}, \xi_n)| < \varepsilon$, где $\sigma(\{x_{d,n}\}, \xi_n)$ – интегральная сумма в определении **40** (это неравенство означает что $\sigma(\{x_{d,n}\}, \xi_n)$ принадлежит ε окрестности). Раскрыв неравенство получим $I - \varepsilon < \sigma(\{x_{d,n}\}, \xi_n) < I + \varepsilon$.

<u>Доказательство</u>.

1) Докажем сначала что из существования интеграла Римана следует что

$\lim_{d\to 0}(s_{d,n}) = \lim_{d'\to 0}(S_{d',n'}) = I$. Если и мы это докажем, то отсюда сразу не следует $\lim_{d\to 0}(S_{d,n} - s_{d,n}) = 0$ так как в этом равенстве одинаковые разбиения для $S_{d,n}$ и $s_{d,n}$.

Выберем ε. Также выберем , такое λ, что $0 < \lambda < \varepsilon$. На основании вышесказанного для любого $\varepsilon - \lambda > 0$ существует $0 < \delta(\varepsilon)$, такое, что для разбиения $\{x_k\}$ при условии $d < \delta$ (d − диаметр разбиения) при любом выборе точек ξ_i следует $\left|\sigma(\{x_{d,n}\}, \xi_n) - I\right| < \varepsilon - \lambda$ или иначе $I - \varepsilon + \lambda < \sigma(\{x_{d,n}\}, \xi_n) < I + \varepsilon - \lambda$. Но для разбиений с одинаковыми точками разбиений, но разными точками ξ_n, между множеством интегральных $\sigma(\{x_{d,n}\}, \xi_n)$ сумм и $S_{d,n}$ (верхняя сумма) и $s_{d,n}$ (нижня сумма) нет «щелей» (смотри определение **3** и теорему **55**). Мы ввели число λ для того, чтобы неравенство было строгим и охватывало кроме множества интегральных сумм σ еще нижнюю s и верхнюю S сумму и интегралы Дарбу. Если это учесть и еще учесть соотношение между $s_{d,n} \le S_{d',n'}$, следующее из теоремы **57,** тогда $I - \varepsilon < s_{d,n} \le S_{d',n'} < I + \varepsilon$. (Смотри рисунок.) Это соотношение осуществляется для любых разбиений, у которых $d<\varepsilon$. Это означает что $\left|S_{d,n} - I\right| < \varepsilon$ и $\left|s_{d,n} - I\right| < \varepsilon$ для любых разбиений, у которых $d<\varepsilon$, то есть,



$\lim_{d\to 0}(s_{d,n}) = I$ и $\lim_{d\to 0}(S_{d,n}) = I$.

Рис. 23.

2) Теперь докажем что из существования интеграла Римана $\to \lim_{d\to 0}(S_{d,n} - s_{d,n}) = 0$.

Из доказанного выше неравенства $I - \varepsilon < s_{d,n} \le S_{d',n'} < I + \varepsilon$ для $d, d' < \varepsilon$, следует что $I - \varepsilon < S_{d'n'} < I + \varepsilon$ и $-I - \varepsilon < -s_{d,n} < -I + \varepsilon$. Складывая эти неравенства получим $-2\varepsilon < 0 \le S_{d',n'} - s_{d,n} < 2\varepsilon$. Заметим, что неравенство выполняется и при $d = d'$, это так как они принадлежат одному множеству, а это означает что $\lim_{d\to 0}(S_{d,n} - s_{d,n}) = 0$.

<u>Достаточность</u>. (Из $\lim_{d\to 0}(S_{d,n} - s_{d,n}) = 0 \to$ существование интеграла Римана. Отметим, что для верхней и нижней суммы разбиение одно и тоже).

1) Докажем сначала что $\lim_{d'\to 0}(S_{d',n'}) = \lim_{d\to 0}(s_{d,n}) = I$. (Отметим, что разбиения в равенствах разные).Выбираем $\varepsilon>0$. Из определения **43** верхнего I^* и **44** нижнего I_* интеграла Дарбу и из теоремы **58** имеем $s_{d,n} \le I_* \le I^* \le S_{d'n'}$. Эта ситуация отражена на рис. 24.

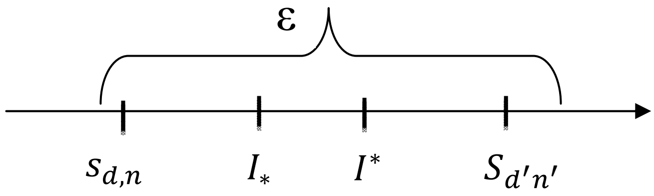


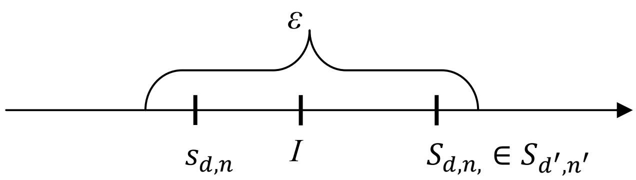
Рис. 24.

Из него видно, что $I^* - I_* \leq S_{d'n'} - s_{d,n}$. В правой части не равенства разбиения для S и s разные, но, поскольку эти множества содержат все возможные разбиения, то пары разбиений содержат и совпадающие разбиения, а для них так же $S_{d,n} - s_{d,n} < \varepsilon$ то есть эта разность может быть сколь угодно малой. Следовательно $I^* = I_*$

Получим это алгебраически. Из средней части этой системы неравенства $s_{d,n} \leq I_* \leq I^* \leq S_{d'n'}$ следует $0 \leq I^* - I_*$. Так же из этой же системы неравенств следует $I^* \leq S_{d',n'}$ и $-I_* \leq -s_{d,n}$. Складывая эти два неравенства получим $I^* - I_* \leq S_{d'n'} - s_{d,n}$. Это неравенство выполняется и для $d = d'$, $n = n'$ то есть $I^* - I_* \leq S_{d,n} - s_{d,n}$. и учитывая условие теоремы $I^* - I_* \leq S_{d,n} - s_{d,n} \leq \varepsilon$ и в силу произвольности ε это означает что $I^* = I_* = I$.

Тогда первоначальное неравенство $s_{d,n} \leq I_* \leq I^* \leq S_{d',n'}$. примет вид

$$s_{d,n} \leq I \leq S_{d',n'}. \tag{*}$$



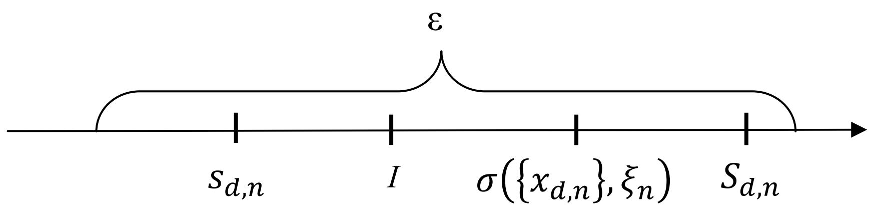
Эту ситуацию иллюстрирует рис. 25.

Рис. 25.

2) Так как $S_{d,n} \in S_{d',n'}$ то мы можем заменить $S_{d',n'}$ на $S_{d,n}$. Но $s_{d,n}$ $\sigma(\{x_{d,n}\}, \xi_n)$ $S_{d,n}$ и, следовательно, $\sigma(\{x_{d,n}\}, \xi_n) \in \varepsilon -$ окрестности *I*. Это означает что *I* – интеграл Римана.

Докажем это алгебраически. Из неравенства $s_{d,n} \leq I \leq S_{d',n'}$ следует $0 \leq I - s_{d,n}$ и $I \leq S_{d',n'}$ вычитая из последнего неравенства $s_{d,n}$ получим $I - s_{d,n} \leq S_{d',n'} - s_{d,n}$. Поэтому $0 \leq I - s_{n,d} \leq S_{d',n'} - s_{n,d}$ (Смотри рисунок В). Аналогично получаем $0 \leq S_{d',n'} - I \leq S_{d',n'} - s_{n,d}$ ($I \leq S_{d',n'} \to 0 \leq S_{d',n'} - I$ из $s_{n,d} \leq I \to -I \leq -s_{n,d} \to S_{d',n'} - I \leq S_{d',n'} - s_{n,d}$). Так как $lim_{d\to 0}(S_{d,n} - s_{d,n}) = 0$, а эти равенства действительны и для $d = d'$, $n = n'$, получим $0 \leq I - s_{n,d} \leq S_{d,n} - s_{n,d} < \varepsilon$ и $0 \leq S_{d,n} - I \leq S_{d,n} - s_{n,d} < \varepsilon$. Теперь мы можем развязать разбиения вдвух последних неравенствах. Это означает, что $lim_{d\to 0}(I - s_{n,d}) = 0$, $lim_{d'\to 0}(S_{d',n'} - I) = 0$.

*Из определения **44** верхних **43** и нижних сумм Дарбу следует что*



$s_{d,n} \leq \sigma(\{x_{d,n}\},\xi_n)$ *и* $\sigma(\{x_{d,n}\},\xi_n) \leq S_{d,n}$.

Рис. 26.

Из рисунка можно видеть что $|\sigma(\{x_{d,n}\},\xi_n) - I| \leq \varepsilon$.

Докажем это алгебраически. Пусть $I \geq \sigma(\{x_{d,n}\},\xi_n)$. *Тогда из неравенств (*)* $S_{d,n} \geq I$ *и* $-s_{d,n} \geq -\sigma(\{x_{d,n}\},\xi_n)$. *Складывая их, получим* $I - \sigma(\{x_{d,n}\},\xi_n) \leq S_{d,n} - s_{d,n} \leq \varepsilon$.

Аналогично рассматривая случай $I \leq \sigma(\{x_{d,n}\},\xi_n)$ *получим* $\sigma(\{x_{d,n}\},\xi_n) - I \leq S_{d,n} - s_{d,n} \leq \varepsilon$. *Это означает что* $|\sigma(\{x_{d,n}\},\xi_n) - I| \leq \varepsilon$. *Следовательно, интеграл по Риману существует.*

Теорема 61. (критерий Дарбу). Для того чтобы функция была интегрируема на отрезке по Риману, необходимо и достаточно, чтобы нижний I_* и верхний I^* интегралы Дарбу были равны.

Доказательство.

Необходимость. (Из интегрируемости по Риману следует равенство нижнего I_* и верхнего I^* интегралов Дарбу).

Из определения верхних $S_{d,n}$, и нижних сумм Дарбу $s_{d',n'}$ теоремы **57** следует $I^* - I_* \leq S_{d,n} - s_{d',n'}$ (см. рис.), тогда из необходимости пункт 2) теоремы **60** следует $I^* = I_*$

Достаточность. (Из $I^* = I_*$ следует интегрируемость функции).

Из теоремы **59** следует $\lim_{d\to 0}(S_{d,n} - s_{d,n}) = \lim_{d\to 0}(S_{d,n}) - \lim_{d\to 0}(s_{d,n}) = I^* - I_* = 0$

Тогда из теоремы **60 (достаточность)** следует интегрируемость функции по Риману.

Теорема 62 (критерий Римана). Для того чтобы функция была интегрируема на отрезке необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало такое разбиение что $S_{d,n} - s_{d,n} < \varepsilon$.

Достаточность. **(**Из интегрируемости функции следует что для любого $\varepsilon>0$ существует такое разбиение что $S_{d,n} - s_{d,n} < \varepsilon$)

Согласно предыдущей теореме **59** если функция интегрируема, то $\lim\limits_{d\to 0}(S-s)=0$.

Следовательно для любого $\varepsilon>0$ найдется такое разбиение что $S_{d,n} - s_{d,n} < \varepsilon$.

Необходимость. **(**Из того что для любого $\varepsilon>0$ существует такое разбиение что $S_{d,n} - s_{d,n} < \varepsilon$ следует интегрируемость функции).

Для нижних сумм s_d, верхних сумм S_d, нижнего интеграла Дарбу и верхнего интеграла Дарбу существует очевидное (следующее из их определения) соотношение $s_{d,n} \le I_* \le I^* \le S_{d,n}$. Следовательно, $0 \le I^* - I_* \le S_{d,n} - s_{d,n} < \varepsilon$, следовательнно $I_* = I^*$ Отсюда, согласно теореме **60,** следует что функция интегрируема.

Интегрируемые функции.

Теорема 63. (Кантора). Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она равномерно непрерывна на $[a,b]$. (Функция называется равномерно непрерывной на множестве $\{x\}$ если для любого ε>0, сколь оно бы ни было мало, найдется отвечающее ему число $\delta > 0$, что для любых точек x' и x'', удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$ выполняется $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Отметим, что зафиксировав x'' получим, что равномерно непрерывная функция является непрерывной. Условие $x \in [a,b]$, а не (a,b), существенно).

Доказательство. (Функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $\rightarrow$ равномерно непрерывна на $[a,b]$).

Докажем от противного. Предположим что, для некоторого $\varepsilon > 0$ не найдется такого δ>0, что $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ для любых $x', x'' \subset [a,b]$ и $|x' - x''| < \delta$. То есть, существует такое $\varepsilon > 0$, что какое бы δ>0 ни взять найдутся $x', x'' \subset [a,b]$ и $|x' - x''| < \delta$, такие, что $|f(x') - f(x'')| > \varepsilon$. Выберем последовательность чисел $\delta_n \to 0$. Для этой последовательности будут соответствовать две последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ такие, что $|f(x'_n) - f(x''_n)| > \varepsilon$. Обе они ограничены на $[a,b]$. По тереме Вейерштрасса **26** из каждой из них можно выделить сходящуюся под последовательность, пусть, например, это будет $\{x'_k\}$ и пусть $x'_k \to x_0$. В силу непрерывности $f(x)$ $f(x'_k) \to f(x_0)$. Докажем, что соответствующая последовательность $x''_k \to x_0$. Неравенство $|x'_k - x''_k| < \delta_k$ означает, что расстояние между x'_k и x''_k стремится к нулю. Поэтому, если мы предположим что $x''_k \to x''_0 \ne x_0$, то расстояние между x'_k и x''_k не стремится к нулю так как их ε окрестности можно сделать не пересекающимися, а это противоречит вышесказанному, о том, что расстояние между x'_k и x''_k стремится к нулю.

В силу непрерывности $f(x)$ $f(x'_k) \to f(x_0)$ и $f(x''_k) \to f(x_0)$ что противоречит допущению $|f(x') - f(x'')| > \varepsilon$.

Теорема 64. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она интегрируема по Риману на всем сегменте.

Доказательство. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. то согласно теореме Кантора она равномерно непрерывна на $[a,b]$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ>0, что $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ для любых $x', x'' \subset [a,b]$ и $|x' - x''| < \delta$. Для нас это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ>0, что для разбиения $\{x_k\}$ с диаметром $d < \delta$ будет $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ для $x', x'' \subset [x_k, x_{k+1}]$. Тогда $|f(x') - f(x'')|(x_{k+1} - x_k) < \varepsilon(x_{k+1} - x_k)$. Суммируя по отрезкам разбиения, получим:

$$\sum_{k=1}^{N} |f(x') - f(x'')|(x_{k+1} - x_k) < \varepsilon \sum_{k=1}^{N} (x_{k+1} - x_k)$$

$$\sum_{k=1}^{N} |f(x')(x_{k+1} - x_k) - f(x'')(x_{k+1} - x_k)| < \varepsilon(b-a).$$

Выбирая координату x' такой, что в ней $f(x)$ принимает максимальное значение на $[x_k, x_{k+1}]$, а в x'' минимальное значение $f(x)$ на $[x_k, x_{k+1}]$ получим $S - s < \varepsilon(b-a) = \varepsilon'$ где $\varepsilon' > 0$ новое произвольное число. Это означает что $\lim\limits_{d\to 0}(S-s) = 0$. Тогда из теоремы **60** следует интегрируемость по Риману.

Теорема 65. Монотонная и ограниченная на сегменте $[a, b]$. функция интегрируема по Риману на всем сегменте.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ не убывает и не постоянна на $[a, b]$. Выберем $\varepsilon < 0$. Рассмотрим разбиение $\{x_k\}$ с диаметром $d < \varepsilon/(f(b) - f(a))$. Из не убывания функции, следуют неравенства:

$\sum_{n=1}^{N}(M_n - m_n) \le f(b) - f(a)$,

где M_n и m_n – точные верхние и нижние грани на $[x_{n-1}, x_n]$. Тогда, учитывая это, получаем, что $S - s = \sum_{n=1}^{N}(M_n - m_n)\Delta x_n \le \sum_{n=1}^{N}(M_n - m_n)d \le$

$$\big(f(b) - f(a)\big)d \le \frac{\big(f(a)-f(b)\big)\varepsilon}{f(a)-f(b)} = \varepsilon.$$

То есть $S - s < \varepsilon$ и, следовательно, по **теореме 59** функция интегрируема. Из этой теоремы следует:

Теорема 66. Если ограниченная на $[a, b]$ функция имеет только конечное количество экстремальных точек, то она интегрируема.

Пример непрерывной, но имеющей бесконечное число экстремальных точек: $x \sin\frac{1}{x}$

Пример разрывной, но интегрируемой функции $y = x^2\frac{|x-1|}{1-x} + 3, y = 1$ при $\mathrm{x} = 1$.

Теорема 67. Пусть функции $f(x)$ и $\mathrm{g}(x)$ интегрируемы на $[a, b]$. Тогда функция $f(x) - g(x)$ также интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство. Для любого разбиения $[a, b]$. и любом выборе промежуточных точек ξ_i справедливы равенства:

$$\sum_{i=1}^{N}[f(\xi_i) + g(\xi_i)]\Delta x_i = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{N} g(\xi_i)\Delta x_i$$

Согласно определения интеграла по Риману для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие диаметры разбиений d_1 и d_2 для первой и второй суммы, что $\left|\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x_i - I_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\left|\sum_{i=1}^{N} g(\xi_i)\Delta x_i - I_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для диаметров разбиения $d < \min\{d_1, d_2\}$, будет $\left|\sum_{i=1}^{N}[f(\xi_i) + g(\xi_i)]\Delta x_i - (I_1 + I_2)\right| = \left|\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x_i - I_1 + \sum_{i=1}^{N} g(\xi_i)\Delta x_i - I_2\right| <$

$< \left|\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x_i - I_1\right| + \left|\sum_{i=1}^{N} g(\xi_i)\Delta x_i - I_2\right| < \varepsilon$ Что означает интегрируемость суммы интегрируемых функций.

Теорема 68. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Тогда функция $cf(x)$ $(c = const)$ также интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство. Для любого разбиения $[a, b]$ и любом выборе промежуточных точек ξ_i справедливы равенства: $\sum_{i=1}^{N} cf(\xi_i)\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x_i$. Согласно определения интеграла по Риману для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой диаметр разбиений d

для суммы, что $\left|\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \dfrac{\varepsilon}{c}$. Тогда для этих диаметров разбиения будет $\left|\sum_{i=1}^{N} cf(\xi_i)\Delta x_i - cI\right| < \varepsilon$. Что означает интегрируемость функции $cf(x)$.

Теорема 69. (без доказательства). Пусть $f(x)$ − функция, интегрируема по Риману на $[a,b]$, а m и M − ее нижняя и верхняя точные грани; а функция $\varphi(x)$ непрерывна на . Тогда функция $h(x) = \varphi[f(x)]$ интегрируема по Риману на $[a,b]$.

Теорема 70. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$. Тогда функция $f(x)g(x)$ также интегрируема на $[a,b]$.

<u>Доказательство</u>. Запишем равенство $f(x)g(x) =$ $f(x)g(x) = 1/4\left\{[f(x)+g(x)]^2 - [f(x)-g(x)]^2\right\}$. И правой части стоят, согласно предыдущим теоремам, интегрируемая функция (квадрат функции −

это функция от функции), следовательно, теорема доказана.

Соглашения (определения): 1) $\int_a^a f(x)dx = 0$, 2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Теорема 71. Пусть $f(x)$ − функция, интегрируема по Риману на $[a,c]$. и $[c,b]$, а интегралы соответственно равны I_1 и I_2, то функция интегрируема на $[a,b]$ и

$$\int_a^b f(x)dx = I_1 + I_2 = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $a < c < b$. Выберем $\varepsilon > 0$. На $[a,b]$. сделаем разбиение $\{x_N\}$ так, чтобы на $[a,c]$, при этом диаметре разбиения d и меньшем диаметре выполнялось соотношение $\left|\sum_{i=1}^{N'} f(\xi_i)\Delta x_i - I_1\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ и $\left|\sum_{i=1}^{N''} f(\xi_i)\Delta x_i - I_2\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ на $[c,b]$, а так же выберем диаметр разбиения таким, что бы $\Delta x_c = x_{N_c+1} - x_{N_c}$(окрестность точки c) так, чтобы $\Delta x_c < \frac{\varepsilon}{3(M-m)}$ где

$M = \max(f(x))$, $m = \min(f(x))$ на $[a,b]$.

Пусть точка c принадлежит $[x_{N_c-1}, x_{N_c}]$ а точка ξ_{N_c} находится левее точки c. Рассмотрим

$$\left|\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x_i - I_1 - I_2\right| = \left|\sum_{i=1}^{N_c-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i - I_1 + f(\xi_{N_c})(x_{N_c} - x_{N_c-1}) + \sum_{i=N_{c+1}}^{N} f(\xi_i)\,\Delta x_i - I_2\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{N_c-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i - I_1 + f(\xi_{N_c})(c - x_{N_c-1}) + f(\xi_{N_c})(x_{N_c} - c) + \sum_{i=N_{c+1}}^{N} f(\xi_i)\,\Delta x_i - I_2\right|$$

выберем точку $\xi'_{N_c} \subset [c, x_{N_c}]$ и добавим и вычтем $f(\xi'_{N_c})(x_{N_c} - c)$

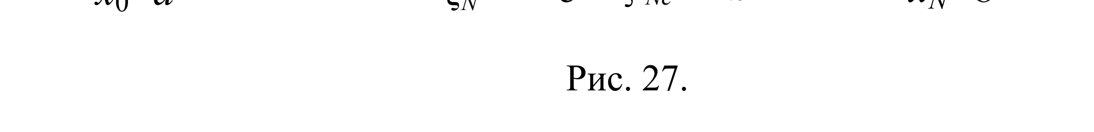


Рис. 27.

$$= \left| \sum_{i=1}^{N_c-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i + f(\xi_{N_c})(c - x_{N_c-1}) - I_1 + f(\xi'_{N_c})(x_{N_c} - c) - f(\xi'_{N_c})(x_{N_c} - c) \right.$$

$$\left. + f(\xi_{N_c})(x_{N_c} - c) + \sum_{i=N_{c+1}}^{N} f(\xi_i)\,\Delta x_i - I_2 \right|$$

$$\left| \sum_{i=1}^{N_c-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i + f(\xi_{N_c})(c - x_{N_c-1}) - I_1 \right| +$$

$$+ \left| \left(f(\xi_{N_c}) - f(\xi'_{N_c}) \right) \right| (x_{N_c} - c) + \left| f(\xi'_{N_c})(x_{N_c} - c) + \sum_{i=N_{c+1}}^{N} f(\xi_i)\,\Delta x_i - I_2 \right|$$

Выберем диаметр исходного разбиения так, чтобы выполнялись неравенства:

$$\left| \sum_{i=1}^{N_c-1} f(\xi_i)\Delta x_i + f(\xi_{N_c})(c - x_{N_c-1}) - I_1 \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left| f(\xi_{N'_c})(x_{N_c-1} - c) + \sum_{i=N_c+1}^{N} f(\xi_i)\Delta x_i - I_2 \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Это возможно, так как наша функция интегрируема, под модулями стоят соответствующие интегральные суммы.

Оставшиеся слагаемое можно сделать удовлетворяющими условию $\left| \left[f\left(\xi_{N_c}\right) - f\left(\xi_{N'_c}\right) \right] (x_{N_c} - c) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$ выбрав $d < \frac{\varepsilon}{3(M-m)}$, так как $(x_{N_c} - c)\ \frac{\varepsilon}{3(M-m)}$,

Это можно сделать так как функция на $[a, b]$ ограничена (иначе она не была бы интегрируема). Тогда с помощью выбора диаметра разбиения можно удовлетворить этому неравенству.

Тогда $\left| \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x_i - I_1 - I_2 \right| < \varepsilon$. Теорема доказана.

Теорема о среднем.

Теорема 72. Пусть $f(x)$ − функция, интегрируема по Риману на $[a, b]$. и пусть $m \le f(x) \le M$ тогда $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$ где $m \le \mu \le M$. Если функция $f(x)$ непрерывная, то $\mu = f(\xi)$, где $a \le \xi \le b$.

<u>Доказательство</u>. Из условия $m \le f(x) \le M$. На $[a, b]$. произведем разбиение. Тогда $m\Delta x_i \le f(x)\Delta x_i \le M\Delta x_i$. Произведя суммирование неравенств получим: $\sum_{i=1}^{N} m\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{N} M\Delta x_i \to m(b-a) \le \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x_i \le M(b-a)$. Сделав предельный переход, и поделив на $(b-a) > 0$ получим $m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} \le M$. Обозначим $\frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} = \mu$ и получим требуемое равенство.

Теорема 73. Пусть $f(x)$ и $g(x)-$ функции, интегрируема по Риману на $[a,b]$ и пусть $m \le f(x) \le M$ и $g(x) \ge 0$ тогда $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$ где $m \le \mu \le M$, а если функция $f(x)$ непрерывная, то $\mu = f(\xi)$, где $a \le \xi \le b$.

Доказательство. Из условия $m \le f(x) \le M$. На $[a,b]$ произведем разбиение. Тогда $m\Delta x_i \le f(x_i)\Delta x_i \le M\Delta x_i$, и в следствии $g(x) \ge 0$ имеем

$m\Delta x_i g(\xi_i) \le f(x_i)g(\xi_i)\Delta x_i \le M(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i$,. Произведя суммирование неравенств, получим:

$\sum_{i=1}^{N} mg(\xi_i)\Delta x_i \;\; \sum_{i=1}^{N} mf(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i \;\; \sum_{i=1}^{N} Mg(\xi_i)\Delta x_i.$

Сделав предельный переход, и поделив на $\int_a^b g(x)dx > 0$ получим $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$.

Обозначим $\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu$ и получим требуемое равенство. Если $f(x)$ непрерывная, то любое число принадлежащее $[m,M]$ является значением $f(x)$ (теорема **37**) при $x \subset [a,b]$. Тогда $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$ где $a \le \xi \le b$.

Определенный интеграл как функция верхнего предела.

Если функция $f(x)$ − функция интегрируема по Риману на $[a,b]$, то она интегрируема по Риману и на $[a,x]$где $x \subset [a,b]$ и $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Теорема 74. Если функция $f(x)$ − функция интегрируема по Риману на $[a,b]$, то $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ − непрерывная функция.

Доказательство. $\Phi(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt = \Phi(x) + \int_x^{x+h} f(t)dt \Rightarrow$

$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = \mu h$, где μ находится между максимальным и минимальным значением $f(x)$ на $[a,b]$ (так как функция интегрируема, то она ограничена согласно теореме). Следовательно $\lim\limits_{h\to 0}\Phi(x+h) - \Phi(x) = \lim\limits_{h\to 0}\mu h = 0$, согласно теореме о среднем. Из этого соотношения следует $\Phi'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ \xi\to x\\ x\subset[x,x+h]}} f(\xi) = f(x)$. Отсюда следует

Теорема 75. $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ − есть первообразная непрерывной функции $f(x)$.

Формула Ньютона-Лейбница.

$\int\limits_a^b f(t)dt=\Phi(b)+C$ тогда $\int\limits_a^a f(t)dt=0=\Phi(a)+C\Rightarrow C=-\Phi(a)\Rightarrow$

$$\int\limits_a^b f(t)dt=\Phi(b)-\Phi(a)$$

Остаточный член в формуле Тейлора.

$$\int\limits_a^x f'(t)dt=f(x)-f(a)=\int\limits_a^x f'(t)dt=\begin{Bmatrix}u(t)=f'(t)\\ v(t)=-(x-t)\end{Bmatrix}=-f'(t)(x-t)\Big|_a^x+\int\limits_a^x f''(t)(x-t)dt=$$

$$f'(a)(x-a)+\int\limits_a^x f''(t)(x-a)dt=\begin{Bmatrix}u(t)=f^2(t)\\ v(t)=-\frac{1}{2}(x-t)\\ v'(t)=x-t\end{Bmatrix}=f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(t)(x-t)^2\,|_a^x$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^x f'''(t)(x-t)^2dt=$$

$$=f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{2}\int_a^x f'''(t)(x-t)^2dt\ldots=$$

$$\begin{Bmatrix}u(t)=f^{(n)}(t)\\ v(t)=-\frac{1}{n}(x-t)\\ v'(t)=(x-t)^{n-1}\end{Bmatrix}=$$

$$=f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n+\frac{1}{n!}\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt=$$

Используя теорему о среднем

$$\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^ndt=\{\xi\subset[a,x]\}=\frac{f(\xi)^{(n+1)}}{n+1}(x-a)^{n+1}$$

Получим

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(x)(x-a)^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n+\frac{f(\xi)^{(n+1)}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Это и есть формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Пусть $x=a+\Delta x$ тогда

$$f(a+\Delta x)=f(a)+f'(a)\Delta x+\frac{1}{2}f''(a)\Delta x^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\Delta x^n+\frac{f(\xi)^{(n+1)}}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}$$. Если $a=0$

$$f(\Delta x)=f(0)+f'(0)\Delta x+\frac{1}{2}f''(0)\Delta x^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\Delta x^n+\frac{f(\xi)^{(n+1)}}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}$$

Длина дуги плоской кривой.

Пусть имеется плоская кривая, заданная параметрически непрерывными функциями $x(t)$, $y(t)$, $t_A \le t \le t_B$. Пусть так же каждой переменной t соответствует своя точка плоскости, не совпадающая ни с одной другой точкой кривой. Концами кривой назовем точки, соответствующие t_A и t_B. Точки, соответствующие концам кривой, могут совпадать и тогда мы ее называем замкнутой кривой. Ильин называет такую кривую простой плоской кривой.

Разобьем отрезок $[t_A, t_B]$ на N частей точками $t_0 = t_A < t_1 < t_2 < \cdots, < t_N = t_B$. Этим значениям параметра соответствуют точки на кривой. Соединим соседние точки отрезками и назовем их хордами.

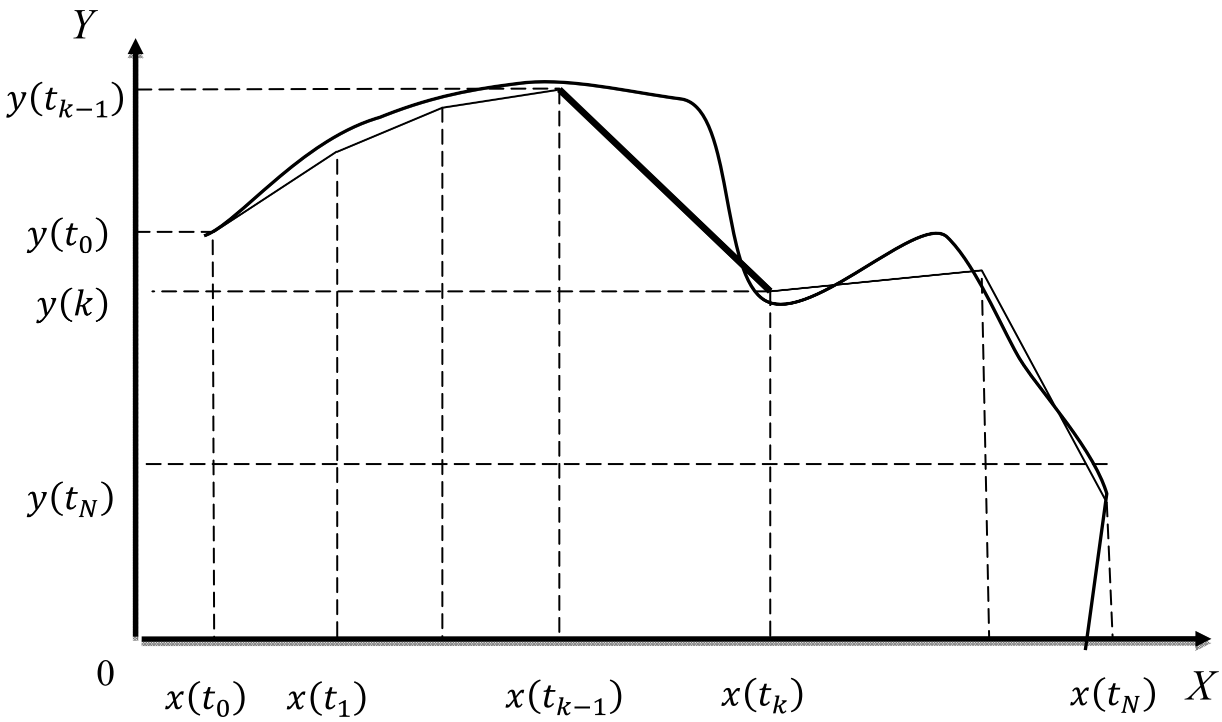


Рис. 28.

Длина k-й хорды равна $l_k = \sqrt{\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big)^2 + \big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)^2}$.

Докажем две теоремы относящиеся к длине хорды.

Теорема 75. Для любого ε>0 найдется такое $\delta > 0$ что при $t_k - t_{k-1} < \delta$ будет $l_k < \varepsilon$.

<u>Доказательство</u>. В силу непрерывности, а, следовательно, в силу равномерной непрерывности (теорема **60** Кантора) для любого $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} > 0$ найдется такое δ>0 что при $t_k - t_{k-1} < \delta$ будет выполняться неравенство $|x(t_k) - x(t_{k-1})| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ и $|y(t_k) - y(t_{k-1})| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Тогда $l_k = \sqrt{\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big)^2 + \big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)^2} < \varepsilon$.

Теорема 76. Для любого ε>0 найдется такое δ>0 что при любых $l_k < \delta$ будет выполняться неравенство $t_k - t_{k-1} < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть это не так. То есть, найдется такое ε>0 что для любых δ>0 найдутся такие $l_k < \delta$ что $t_k - t_{k-1} > \varepsilon$. Выберем последовательность $\delta_n \to 0$. Каждому δ_n будут соответствовать свои две ограниченные последовательности по n: $\{t_k^n\}$ – последовательность соответствующая правым концам отрезков. и $\{t_{k-1}^n\}$ - последовательность соответствующая левым концам отрезков. Так как последовательность $\{t_k^n\}$ ограничена, то, согласно теореме **26,** (Больцано-Вейерштраса) из нее можно выделить сходящуюся под последовательность $t_k^i \to t_k'$, соотвествующая правым концам отрезков. При этом последовательность соответствующая левым концам $\{t_{k-1}^i\}$ может и не сходиться, но оно ограничено и, следовательно, согласно теореме **26,** (Больцано-Вейерштраса) из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{t_{k-1}^j\}$, такая что $t_{k-1}^j \to t_{k-1}'$, соотвествующая левым концам отрезков. Этим левым концам будет соответствовать последовательность правых концов $\{t_k^j\}$, которая является подпоследователностью сходящейся последовательности $\{t_k^i\}$. Согласно теореме **22** подпоследовательность сходящейся последовательности также сходится, то есть, $t_k^j \to t_k'$, при этом $t_k' - t_{k-1}' \geq \varepsilon$. **(**Если предположить, что это не так, то найдется номер j такой, что

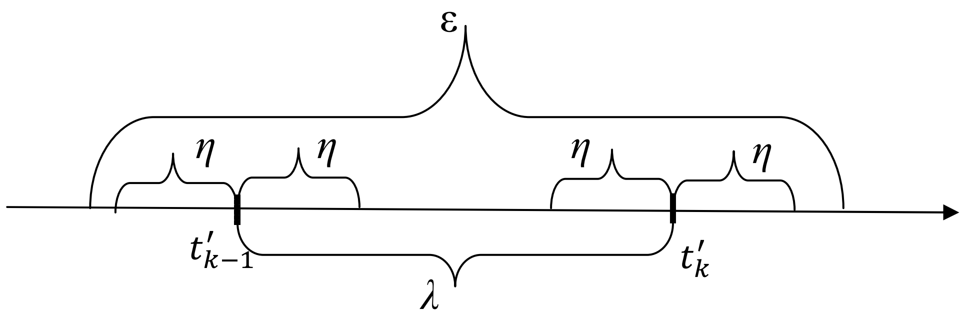


Рис. 29.

возникнет ситуация, изображенная на рисунке 29.

Обозначим $t_k' - t_{k-1}' = \lambda < \varepsilon$. Обозначим символом $\eta = {(\varepsilon - \lambda)}/{2}$. Ввиду сходимости рядов $\{t_{k-1}^j\}$ и $\{t_k^j\}$ в η окрестностях точек t_{k-1}' и t_k' найдутся члены соответствующих последовательностей, расстояние между ними меньше $\eta + \lambda + \eta = {(\varepsilon - \lambda)}/{2} + {(\varepsilon - \lambda)}/{2} = \varepsilon$, что противоречит исходному предположению**).**

Расстояние между точками t_{k-1}' и t_k' $l_k = \sqrt{\left(x(t'_k) - x(t'_{k-1})\right)^2 + \left(y(t'_k) - y(t'_{k-1})\right)^2}$ конечно. Но этого не может быть как условие $l_k^j \to 0$ это принято в начале доказательства от противного путем выбора последовательности $\delta_n \to 0$. Теорема доказана.

Определение 47. Рассмотрим все возможные разбиения отрезка $[t_A, t_B]$ и все возможные $p = \sum_{k=1}^{N} l_k$. Назовем длиной дуги S точную верхнюю грань множества $\{p\}$, а саму дугу спрямляемой.

Теорема 77. Пусть функции $x(t),\ y(t),\ t_A \le t \le t_B$.непрерывные и дифференцируемые и пусть производные $x'(t),\ y'(t),\ t_A \le t \le t_B$ непрерывны. Тогда кривая спрямляема.

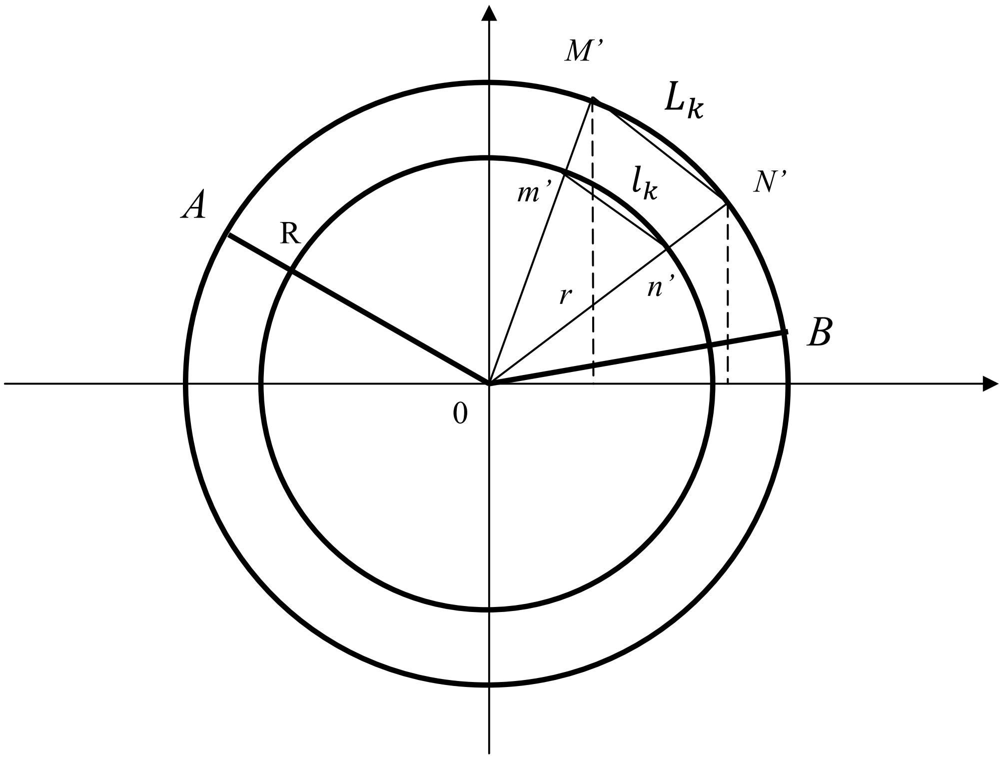
Доказательство. Согласно теореме о среднем

$$p = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{\left(x(t_k) - x(t_{k-1})\right)^2 + \left(y(t_k) - y(t_{k-1})\right)^2} =$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sqrt{\left(x\left(t_k^p\right)'(t_k - t_{k-1})\right)^2 + \left(y\left(t_{k-1}^p\right)'(t_k - t_{k-1})\right)^2} =$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sqrt{x\left(t_k^p\right)'^2 + y\left(t_{k-1}^p\right)'^2}\,(t_k - t_{k-1}) \text{ где } t_k^p, t_{k-1}^p \in [t_k, t_{k-1}] \le$$

$p \le \sqrt{x_{max}{}'^2 + y_{max}{}'^2}(t_B - t_A)$, следовательно, множество p ограничено, а кривая



спрямляема.

Отношение длины окружности к диаметру.

Рассмотрим две концентрические окружности. Разобьем окружность большего радиуса R на K дуг. Каждому такому разбиению будет соответствовать разбиение окружности меньшего радиуса r, так как мы рассматриваем все возможные разбиения.

Рис. 29.

Треугольники ΔOMN и Δomn подобны. Поэтому $\frac{L_k}{R} = \frac{l_k}{r}$, тогда $\frac{\sum_{i=1}^{K} L_i}{R} = \frac{\sum_{i=1}^{K} l_i}{r}$. Призведя предельнй переход получим $\frac{\breve{L}}{R} = \frac{\breve{l}}{r}$(это возможно, так как график окружности описывается непрерывной функцией). То есть, отношение дуг к радиусу окружности для одного и тог же угла величина постоянная. Для отношения длины окружности к диаметру введено число, именуемое как $\boldsymbol{\pi}$.

Площади и объемы.

Точку M множества $\{M\}$ назовем внутренней точкой этого множества, если найдется такое ε, что в ε окрестности все точки принадлежат множеству $\{M\}$.

Точку M не принадлежащей множеству $\{M\}$ назовем внешней точкой этого множества, если найдется такое ε, что в ε окрестности все точки не принадлежат множеству $\{M\}$.

Если в любой ε найдутся точки принадлежащие и не принадлежащие $\{M\}$, то эта точка называется граничной точкой.

Если множество точек можно заключить в круг (сферу), то оно называется ограниченным.

Будем обозначать площадь (объем) многоугольников P (многогранников) как μ(P).

Свойства:

1. Если фигуры P_1 и P_2 не имеют общих точек, то $\mu(P_1+P_2) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$
2. Если фигуры P_1 и P_2 равны, то $\mu(P_1) = \mu(P_2)$
3. Если фигура P_1 содержится в P_2, то $\mu(P_1) \leq \mu(P_2)$.

Если фигура P_1 содержится в P_2, то P_2 описанная, а P_1 вписанная.

Из этих аксиом (пункт 3) следует, что множество площадей (объемов) вписанных фигур ограничено сверху, а множество площадей (объемов) описанных фигур ограничено снизу. Следовательно, первое множество имеет точную верхнюю грань μ^*, а второе точную нижнюю грань μ_*.

Определение 48 Фигура называется квадрируемой (кубируемой), если $\mu^* = \mu_*$, а эти грани называются площадью (объемом).

Теорема 76. Для квадрируемости (кубируемости) фигуры необходимо и достаточно чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлась такая описанная многоугольная (многогранная) фигура Q и такая вписанная многоугольная (многогранная) фигура P, что

$\mu(Q)-\mu(P) < \varepsilon$.

<u>Необходимость</u>. Дано $\mu^* = \mu_*$, следствие: найдутся описанная многоугольная (многогранная) фигура Q и такая вписанная многоугольная (многогранная) фигура P, что $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$. Из определения **3** точной верхней и точной нижней грани следует, что для любого $\varepsilon>0$ найдутся такие описанная многоугольная (многогранная) фигура Q и вписанная многоугольная (многогранная) фигура P что

$\mu_* - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(P) \leq \mu_*,\ \mu^* \leq \mu(Q) < \mu^* + \frac{\varepsilon}{2}$ или $-\frac{\varepsilon}{2} < \mu(P) - \mu_* \leq 0,\ 0 \leq \mu(Q) - \mu^* < \frac{\varepsilon}{2}$. Или, учтя что $\mu^* = \mu_* = \mu$ получим $0 \leq \mu - \mu(P) < \frac{\varepsilon}{2},\ 0 \leq \mu(Q) - \mu < \frac{\varepsilon}{2}$.

складывая эти неравенства получаем $0 \le \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$. Необходимость доказана.

Достаточность. Нашлись описанная многоугольная (многогранная) фигура Q и вписанная многоугольная (многогранная) фигура P, такие что μ(Q) - μ(P) <ε. Но $\mu(P) \le \mu_* \le \mu^* \le \mu(Q)$, или $-\mu_* \le -\mu(P)$, $\mu^* \le \mu(Q)$ складывая получаем, $0 \le \mu^* - \mu_* \le \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$. Поскольку ε сколь угодно малое число, то $\mu^* = \mu_*$. Эти рассуждения иллюстрируются рисунком:

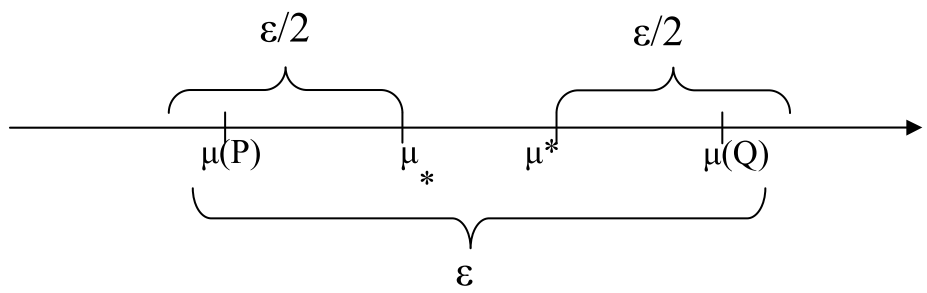


Рис. 30.

Теорема 77. Прямоугольник (прямоугольный параллелепипед) квадрируемы.

Доказательство. Одину из вершин совместим с началом координат, а оси направим по сторонам фигуры. Введем единицу площади (объема) (смотри школьный учебник по геометрии) и плотно заполним ими наши фигуры так, чтобы стороны единичных фигур сначала заполнения совпадали с осями координат как это изображено на рисунке.

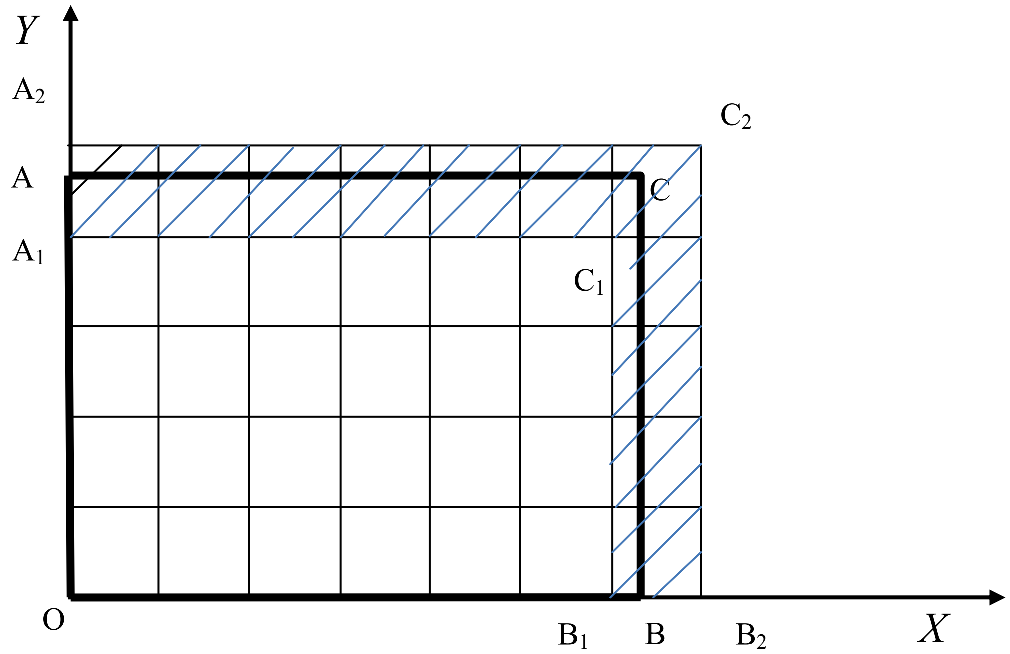


Рис. 31.

Пусть вдоль оси x разместится n внутренних единичных квадратов со стороной $1см$, а вдоль оси y – m. Тогда площадь заштрихованной фигуры равна $(n+1)(m+1) - nm = n + m + 1.< (A_1A_2 + B_1B_2) \times 1cm^2$(дважды учтен угловой квадрат). Так как мы работаем в десятичной системе, то следующее заполнение произведем квадратами со стороной $\frac{1}{10}cm^2$ и площадь аналогичной заштрихованной области будет $\left(\frac{1}{10}\right)^2 cm^2$. Увеличивая точность мы получим, что пощадь заштрихованной области будет уменьшаться со скоростью $(A_2C_{2+} + C_2B_2)\left[\left(\frac{1}{10}\right)cm^2\right]^i$.- где i точность измерения длины. А это означает что площадь этой области можно сделать меньше любого наперед заданного числа ε, А это, согласно **теореме 76,** означает квадрируемость прямоугольника, Следовательно, (что доказывается в курсе планиметрии), квадрируемы треугольник и любой многоугольник.

Аналогично доказывается кубироемость прямоугольного параллелепипеда, а, следовательно, (что доказывается в курсе стереометрии), квадрирумость призмы, не обязательно прямой, в основании которой четырехугольник, треугольник, любой многоугольник.

Если плоская фигура ограничена графиком функции, осью абсцисс и перпендикулярами, опущенными из концов графика на ось x, то верхние суммы Дарбу совпадают с площадью описанного многоугольника, а нижняя сумма Дарбу с площадью вписанного многоугольника. Верхний интеграл Дарбу – это μ*, а нижний интеграл Дарбу это μ_* в определении **47**. Поэтом, если функция интегрируема (это означает равенство верхнего и нижнего интеграла Дарбу в силу теоремы **61**), то она квадрируема.

Перейдем к рассмотрению криволинейного сектора плоской фигуры, заданной в полярной системе координат. Пусть плоская фигура задана двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β.

Теорема 78. Криволинейный сектор является квадрируемой фигурой площадью S которая вычисляется по формуле

$S = \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\,d\theta$

Доказательство.

Разобьем угол $\beta - \alpha$ на сегменты: $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_i < \cdots < \theta_n = \beta$. Максимальный угол θ_i обозначим как d. В каждом сегменте построим по два сектора: один с минимальным радиусом в этом сегменте (пунктирная линия), другой с максимальным радиусом (точечная линия) (минимум и максимум функции $r(\theta)$ в этом секторе). В результате получится фигура состоящая из суммы секторов вписанных в наш сегмент и фигура состоящая из суммы секторов описанных вокруг нашего сегмента.

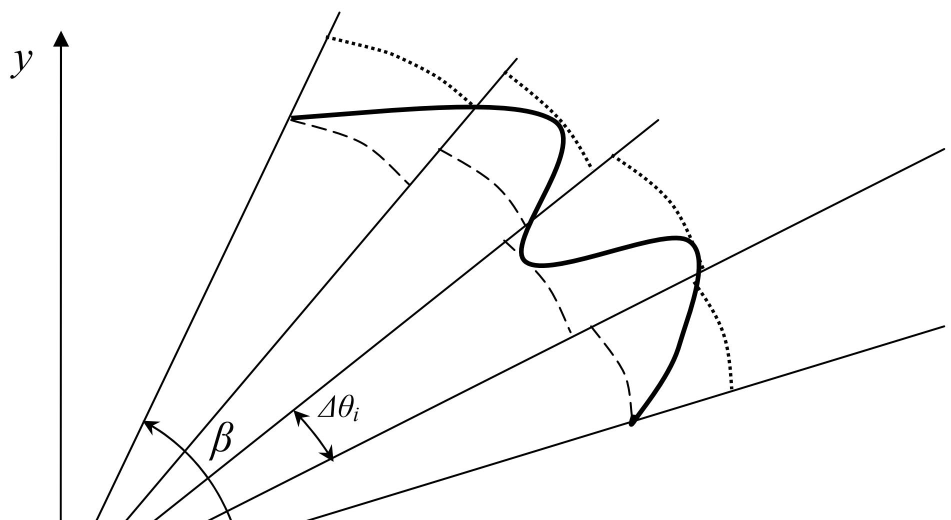


Рис. 32.

Рассмотрим отдельный сегмент с номером i. Из точки В опустим перпендикуляр АВ на радиус. Получится треугольник, вписанный в сектор с минимальным радиусом. Из точки С восстановим перпендикуляр CD. Получится треугольник, описанный вокруг сектора с максимальным радиусом.

Площадь треугольника OAB равна $\mathrm{OB}^2 \sin \Delta\theta_i \cos \Delta\theta_i = \mathrm{r}_i{}^2(\Delta\theta_i + \alpha_r(\Delta\theta_i))$, где $\lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\alpha_r(\Delta\theta_i)}{\Delta\theta_i} = 0$, а площадь треугольника OCD равна $\mathrm{OD}^2 \operatorname{tg} \Delta\theta_i = \mathrm{R}_i{}^2(\Delta\theta_i + \alpha_R(\Delta\theta_i))$, где $\lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\alpha_R(\Delta\theta_i)}{\Delta\theta_i} = 0$, $r_i = OB$ – минимальный радиус в сегменте, $R_i = OD$ – максимальный радиус в сегменте.

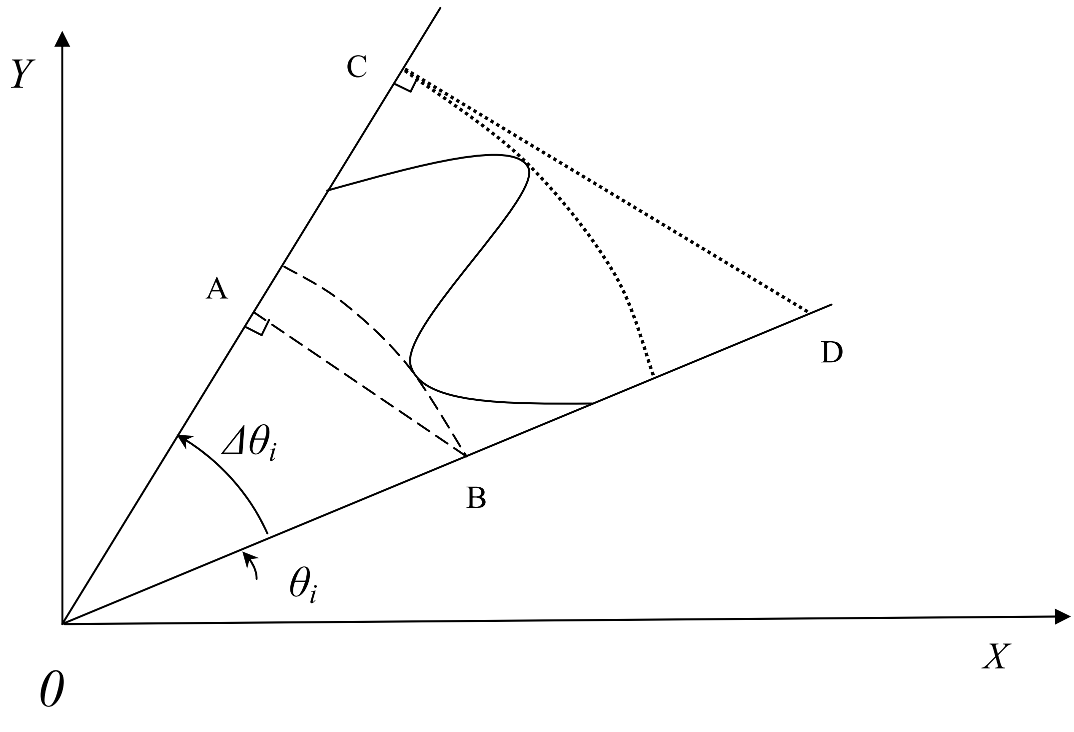


Рис. 33.

Площадь треугольника OAB равна $\frac{1}{2}\mathrm{OB}^2 \sin \Delta\theta_i \cos \Delta\theta_i = \frac{1}{2}\mathrm{r}_i{}^2(\Delta\theta_i + \alpha_{r,i}(\Delta\theta_i))$, где $\lim_{\Delta\theta_i \to 0} \frac{\alpha_{r,i}(\Delta\theta_i)}{\Delta\theta_i} = 0$, а площадь треугольника OCD равна $\frac{1}{2}OC^2 \operatorname{tg} \Delta\theta_i = \frac{1}{2}\mathrm{R}_i{}^2(\Delta\theta_i + \alpha_{R,i}(\Delta\theta_i))$, где $\lim_{\Delta\theta_i \to 0} \frac{\alpha_{R,i}(\Delta\theta_i)}{\Delta\theta_i} = 0$, а r_i – минимальный радиус в сегменте.

Тогда суммы площадей, вписанных треугольников и суммы описанных секторов равны:
$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\mathrm{r}_i^{\ 2}(\Delta\theta_i+\alpha_{r,i}(\Delta\theta_i))$ и $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\mathrm{R}_i^{\ 2}(\Delta\theta_i+\alpha_{R,i}(\Delta\theta_i))$.
Рассмотрим

$$\mu(\mathrm{Q})-\mu(\mathrm{P})=\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}R_i^2\left(\Delta\theta_i+\alpha_{R,i}(\Delta\theta_i)\right)\right]-\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r_i^2(\Delta\theta_i+\alpha_{r,i}(\Delta\theta_i))\right]\leq$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}R_i^2\Delta\theta_i\right]-\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta_i\right]+\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}R_i^2\alpha_{R,i}(\Delta\theta_i)\right]-\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r_i^2\alpha_{r,i}(\Delta\theta_i)\right]$$

Суммы $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta_i$ и $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}R_i^2\Delta\theta_i$ это нижняя и верхняя суммы Дарбу. Из этого следует что если функция $r(\theta)^2$ интегрируема, то согласно **тереме 62** для любого $\varepsilon>0$ найдется разбиение с диаметром разбиения *d* для которого $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}R_i^2(\Delta\theta_i)-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r_i^2(\Delta\theta_i)<\frac{\varepsilon}{3}$. Рассмотрим
$\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r_i^2\alpha_{r,i}(\Delta\theta_i)\right]=\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta_i\frac{\alpha_{r,i}(\alpha_{r,i})}{\Delta\theta_i}\right]\leq\frac{\alpha_d(\alpha_{r,i})}{\Delta\theta_d}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta_i\right]$
Где $\frac{\alpha_d(\alpha_{r,i})}{\Delta\theta_d}$ – максимальное значение этого соотношения при заданном разбиении. Так как это отношение стремится к нулю, $\frac{\alpha_d(\alpha_{r,i})}{\Delta\theta_d}\to 0$, а сумма $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta_i$ ограничена сверху соответствующей суммой описанных треугольников, то можно найти такое разбиение, что $\frac{\alpha_d(\alpha_{r,i})}{\Delta\theta_d}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}R_i^2\alpha_{r,i}(\Delta\theta_i)<\frac{\varepsilon}{3}$. Аналогично можно доказать, что $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r_i^2\alpha_{r,i}(\Delta\theta_i)<\frac{\varepsilon}{3}$. Тогда можно найти такое разбиение, что $\mu(\mathrm{Q})-\mu(\mathrm{P})<\varepsilon$. Согласно **теореме 76** это означает квадрируемость фигуры. Обозначим ее площадь (объем) как *S*.

Найдем как вычислить *S*. Согласно **определения 47** площади (объема) $\mu^*=\mu_*=S$. Так как
$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r_i^2(\Delta\theta_i)\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r_i^2(\Delta\theta_i+\alpha_{r,i}(\Delta\theta_i))\leq S\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}R_i^2(\Delta\theta_i)\leq$
$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}R_i^2\left(\Delta\theta_i+\alpha_{R,i}(\Delta\theta_i)\right)$, то $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r_i^2(\Delta\theta_i)\leq S\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}R_i^2(\Delta\theta_i)$
Так как функция $r(\theta)^2$ интегрируема и в неравенстве слева и справа стоят суммы Дарбу, то согласно **теореме 61 (Дарбу)** верхние и нижние интегралы Дарбу равны, и они равны *S*. а она равна $\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\theta)\,d\theta$.

Объём.

Теорема 79. Докажем, что объём прямого цилиндра высотой *h* в основании которого находится квадрируемая плоская фигура площади *S* равен *hS*.

Доказательство. Если основание квадрируемо, то у площадей множества вписанных многоугольников имеется точная верхняя грань μ^* которая равна точной нижней грани μ_*. Умножая площади вписанных (описанных) многоугольников на *h* мы получим множество объемов прямых призм, вписанных (описанных) в призму с квадрируемом основанием. Следовательно, множество объемов вписанных и описанных призм имеют равные точные верхние и нижние грани $h\mu^* = h\mu_*$. Теорема доказана.

Теорема 80. Пусть имеется тело, которое пересекается плоскостями, перпендикулярными оси x и пусть полученные сечения квадрируемы, и площади являются интегрируемыми функциями от $S(x)$, а $x \in [a, b]$. Тогда объём тела равен $V = \int_a^b S(x)dx$.

Доказательство.

Разобьем отрезок$[a, b]$ точками x_i: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ Обозначим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Проведем через эти точки плоскости, перпендикулярные оси x. Пусть площадь сечения является убывающей функцией. Сделаем проекции верхних сечений на нижние. Пусть проекции сечений и сечения являются вложенными фигурами. Случай, когда проекции сечения не являются вложенными, а площади сечений являются убывающей функции сводится к рассматриваемому случаю. Построим на сечение два вложенных прямых цилиндра основания которых принадлежат плоскости под номером i, одно из которых является сечением нашего тела, а другое проекцией верхнего сечения. Их объемы соответственно равны $v_i = S(x_i)\Delta x_i$ и $V_i = S(x_{i+1})\Delta x_i$. Цилиндр с вложенным основанием основанием содержится в нашей фигуре, а цилиндр охватывающем основанием содержит нашу фигуру.

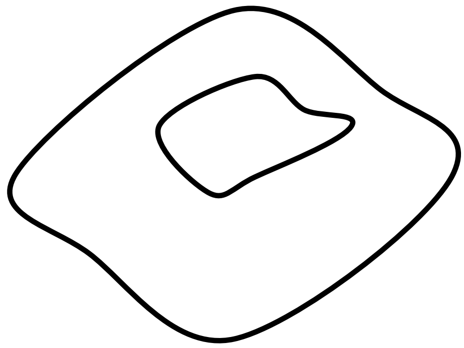


Рис. 34.

Рассмотрим суммы $\sum_{i=0}^{n-1} S(x_i)\Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i$ Эти суммы являются нижними и верхними суммами Дарбу функции $S(x)$, а поскольку функйци интегрируема, то верхние и нижние грани соответствующих сумм Дарбу совпадают, согласно теореме **61**. Но $\sum_{i=0}^{n-1} S(x_i)\Delta x_i$ это объём описанных тел, а $\sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i$ обьем вписанных тел. Совпадение их точных верхних граней означает кубируемость этого тела.

ЛИТЕРАТУРА.

Ильин В.А. – Математический анализ.

Фихтенгольц Г.М.– Курс дифференциального и интегрального исчисления т.1 и т.2.