

Общеобразовательная школа №1189 им. И.В. Курчатова

Уравнения Максвелла

Составитель: Бойченко А.М.

Пособие по физике, 10 класс

электродинамика, ч. 4
уравнения Максвелла

Москва 2012

Оглавление

4.1 Введение. Электродинамика.....	3
4.2 Уравнения Максвелла	4
Магнитное взаимодействие.....	4
Магнитное поле	5
Рамка с током	5
Вектор магнитной индукции	5
Закон Био-Савара-Лапласа	6
Телесный угол	6
Теорема Гаусса-Остроградского	7
Поток напряженности электрического поля от точечного заряда....	7
Поток напряженности электрического поля в произвольном случае	7
Поляризованность диэлектриков	7
Смещение	8
Закон Ампера	9
Намагниченность среды	9
Напряженность магнитного поля	10
Поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность.....	11
Открытие явления электромагнитной индукции	12
Правило Ленца	12
Закон электромагнитной индукции	13
Вихревое электрическое поле	13
Граничные условия на границе раздела сред	13
Смещение	13
Магнитная индукция	14
Напряженность электрического поля	14
Напряженность магнитного поля	14
Взаимная индуктивность контуров	14
Самоиндукция	14
Движение проводников в магнитном поле	15
Напряжение на катушке индуктивности	16
Результирующая индуктивность при последовательном соединении	16
Результирующая индуктивность при параллельном соединении	16
Энергия катушки с индуктивностью	17
Плотность энергии магнитного поля	17
4.3 Заключение	18
Ток смещения	18
Уравнения Максвелла в интегральном и дифференциальном видах	20
Приложение 1	22
Приложение 2	25
Приложение 3	27
Примеры решения задач	28

4.1 Введение. Электродинамика

Начало понимания того, что электрические и магнитные взаимодействия имеют единую природу (*электромагнитное поле* или *взаимодействие*), положено Эрстедом в 1820 г. при наблюдении отклонения магнитной стрелки под действием электрического тока (как сторонник философского принципа, что все явления производятся одной и той же силой, Эрстед целенаправленно, начиная с 1813 г. искал свидетельства преобразования электрической силы в магнитную). Почему проведение такого простого опыта не приходило никому в голову? Ампер считал, что с момента открытия основного закона электростатики существовала всеобщая уверенность в кулоновской гипотезе о природе магнетизма. Такая уверенность исключала всякую возможность взаимодействия между электричеством и магнитными телами.

Почти сразу после ознакомления с работой Эрстеда, Ампер делает доклад (1820) во французской Академии Наук об открытии взаимодействия двух проводников с током. Начинается возведение здания электродинамики (термин введен Ампером), в которой все магнитные явления сводятся к взаимодействиям токов.

В 1821 г. Фарадей обнаружил явление электромагнитного вращения (движения рамки с током внутри подковообразного магнита), что явилось прообразом *электромотора (динамомашин)*. В том же 1821 г. Фарадей повторяет все важные опыты Эрстеда, Ампера, Араго и др. и публикует обзор и статью «О некоторых новых электромагнитных движениях и теории магнетизма». В 1831 г. им обнаружено явление электромагнитной индукции. В серии работ 1831-1855 гг. Фарадей вводит и разрабатывает концепцию поля. Его опыты, демонстрирующие фундаментальные законы, оригинальны и просты. Например, магнитные стрелки, наколотые на пробки, свободно двигаясь по поверхности жидкости вокруг плавающего соленоида, вычерчивают направления линий магнитного поля.

Однако, задача обобщения данных была очень сложной. Уже свой первый обзор Фарадей начинает словами: «Я столкнулся с серьезными трудностями в попытке получить ясную идею о том, что было сделано и кем, вследствие большого разнообразия данных, большого числа теорий, их смущающих следствий и пр.». Даже примерно через 20 лет (1882) после создания электромагнитной теории Максвеллом, Энгельс писал в статье "Электричество": «В учении же об электричестве мы имеем перед собой хаотическую груду старых, ненадежных экспериментов, не получивших ни окончательного подтверждения, ни окончательного опровержения, какое-то неуверенное блуждание во мраке, не связанные друг с другом исследования и опыты многих отдельных ученых, атакующих неизведанную область вразброд, подобно орде кочевых наездников». С какой стороны подойти к задаче не понятно было и Максвеллу. В письмах к отцу в 1855 г. он отмечает трудности

понимания работ немецких ученых (Вебер, Нейман, Гельмгольц). По совету Томсона он сосредотачивается на работе Фарадея «Экспериментальные исследования по электричеству» и решает ничего не предпринимать, пока не разберется с его точкой зрения.

Новое видение предмета начинает приходить к нему к концу 1854 г. В 1856 появляется его работа «О фарадеевских силовых линиях». В работе не содержится принципиально новые физические утверждения, в ней Максвелл находит адекватный математический аппарат, переводит подход Фарадея на язык векторного анализа, который приводит его в итоге к выводу уравнений электродинамики. Главная работа Максвелла – «О физических линиях силы», в которой появляются впервые его уравнения, выходит в свет в 1861 г. В 1864-1865 гг появляется его работа «Динамическая теория электромагнитного поля», в которой вывод уравнений не опирается на какую-либо конкретную модель эфирной среды. В заключительной работе «Трактат по электричеству и магнетизму» (1873) заново излагается содержание предыдущих работ.

Гельмгольц стимулирует Герца заняться изучением структуры уравнений и проверить факт существования электромагнитных волн, предсказываемых теорией. Вскоре электромагнитные волны были обнаружены (см. пособие по электромагнитным волнам).

Таким образом, единый взгляд на природу электрических и магнитных сил сформировался в 1820-1873 гг. Считается, что среди прочих взаимодействий электромагнитное понято лучше всего. Так, теоретическое значение аномального магнитного момента электрона совпадает с экспериментальным с точностью до 11 значащих цифр (относительная точность $2 \cdot 10^{-10}$). Уравнения Максвелла – первые известные нам *релятивистки инвариантные (лоренц-инвариантные)* уравнения (т.е. инвариантные относительно *преобразований Лоренца*, см. пособие по специальной теории относительности). Кроме того, подходы, развитые в электродинамике, нашли применение и в других областях физики. Так, если структура уравнений полей (не электромагнитных) не является релятивистки или калибровочно инвариантной, то считается, что такие уравнения еще далеки до совершенства.

4.2 Уравнения Максвелла

Магнитное взаимодействие. При движении зарядов мы сталкиваемся с новым типом взаимодействия между ними не электрической природы. Закрепим параллельно друг другу два металлических провода. Если по проводам пустить электрический ток (наличие тока только в одном из проводов не меняет их параллельности), то провода начнут либо притягиваться, либо отталкиваться друг от друга в зависимости от направления текущих по ним токов (рис. 4.1). Во всех трех случаях в целом провода нейтральны, поэтому электрическое взаимодействие не проявляется. Различия состоят только в наличии (и направлении) текущих токов. Возникающее взаимодействие имеет магнитную природу и называется *магнитным взаимодействием*.

Магнитное поле. Подобно тому, как электрическое взаимодействие зарядов можно описывать с помощью электрического поля, магнитное взаимодействие можно описывать через *магнитное поле*. Основные свойства магнитного поля связаны с движением зарядов: магнитные поля порождаются токами (движущимися зарядами) и проявляются по действию на ток (движущиеся заряды).

Рамка с током. Таким образом, для выявления магнитных свойств нам нужен пробный проводник с током. Как мы уже знаем, для протекания тока нужен замкнутый контур. Для выявления локальных свойств магнитного поля необходим маленький контур, чем меньше, тем лучше. Итак, нам нужна небольшая рамка или колечко с током. Реализовать их можно следующим образом: можно скрутить провода над петелькой, тем самым можно считать, что ток существует только в ней, поскольку в сплетенных проводах токи равны по величине и противоположны по направлению (рис. 4.2).

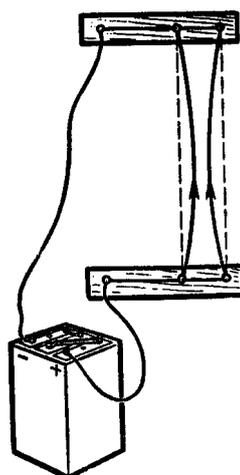


рис. 4.1а

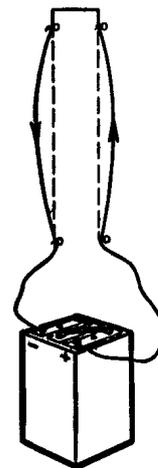


рис. 4.2б



рис. 4.2

Вектор магнитной индукции. Магнитное поле, как и электрическое, принято характеризовать вектором (вектором *магнитной индукции* \vec{B}) и *силовыми линиями*. Густота линий характеризует величину вектора магнитной индукции, а касательная к силовой линии в данной точке пространства задает его направление (рис. 4.3а – силовые линии, создаваемые прямым бесконечным проводом с током, рис. 4.3б – силовые линии катушки с током). За направление линий постоянного магнита принимается направление от северного полюса к южному. Силовые линии магнитного поля можно визуализировать с помощью железных опилок (рис. 4.4а, 4.4б – визуализация рис. 4.3а, 4.3б).

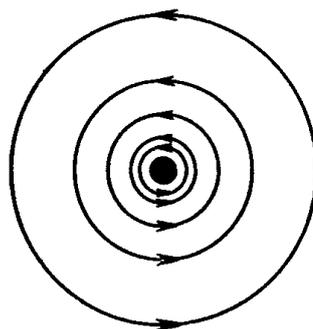


рис. 4.3а

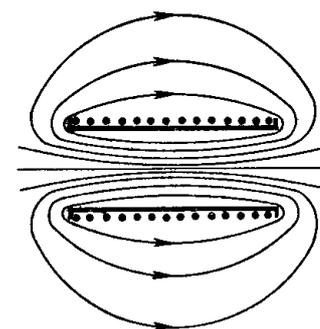


рис. 4.3б

Оказывается, что во внешних магнитных полях рамка с током ведет себя так же, как магнитная стрелка – поворачивается в соответствии с направлением вектора магнитной индукции внешнего поля. Рамка с током создает вокруг себя магнитное поле, направление которого связано с направлением тока, текущего

по рамке *правилом правого винта (буравчика)*: если вращать правый винт по направлению тока, то направление, в котором он будет ввинчиваться, определяет направление создаваемой рамкой магнитной индукции.

Действие магнитного поля на заряженные частицы описано в пособии по однородным электрическому и магнитному полям.

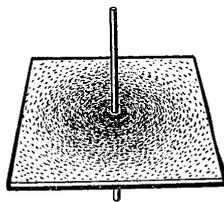


рис. 4.4а

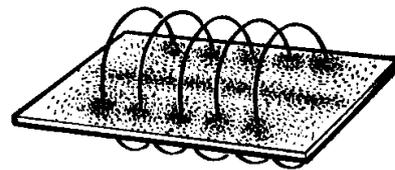


рис. 4.4б

Рассмотрим теперь, как создается магнитное поле.

Закон Био-Савара-Лапласа установлен в результате экспериментов, проведенных Био и Саваром (1820 г.). Магнитная индукция, создаваемая элементом тока I , текущим по тонкому проводу длины dl , на расстоянии r от него, определяется выражением

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} \quad (4.1)$$

где направление вектора $d\vec{l}$ совпадает с направлением тока, μ_0 – магнитная постоянная (рис. 4.5). В обработке и анализе экспериментальных данных принимал участие Лаплас, которым и получена приведенная формула.

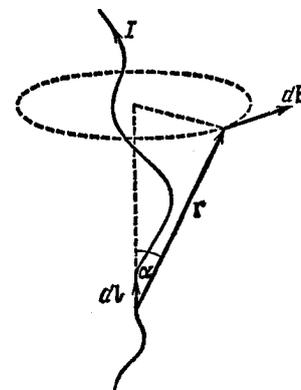


рис. 4.5

Телесный угол. Пусть у нас имеется произвольное тело А (рис. 4.6). Проведем через точку О множество прямых, касающихся поверхности рассматриваемого тела. Проведенные прямые вырежут на сфере радиуса R с центром в точке О некоторую фигуру площади S . Телесным углом, под которым видно тело из точки О, называется величина

$$\Omega = \frac{S}{R^2} \quad (4.2)$$

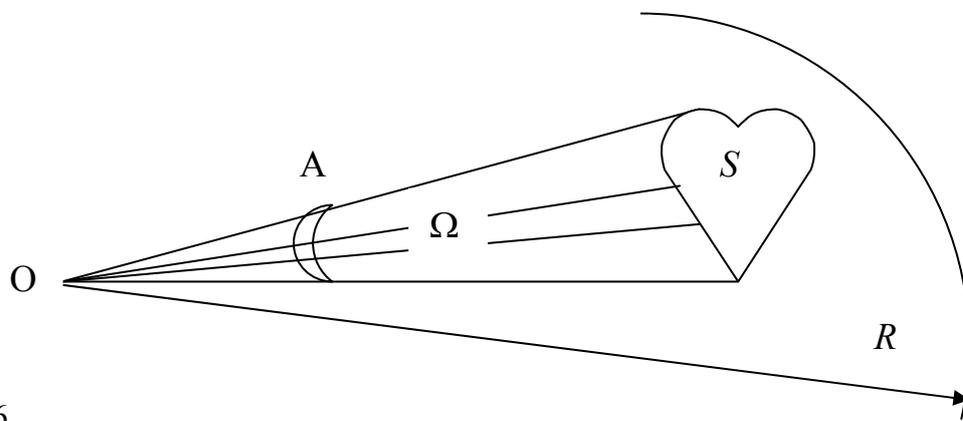


рис. 4.6

Поскольку площадь сферы радиуса R равна $4\pi R^2$, видно, что телесный угол не может превосходить 4π . Это угол, которому соответствует трехмерное эвклидово пространство по отношению к произвольной точке, лежащей внутри него.

Теорема Гаусса-Остроградского. Поток напряженности электрического поля от точечного заряда q в пустом пространстве через произвольную замкнутую поверхность S (см. также (1.22), (1.7)) с учетом (1.5) представляется в виде

$$\Phi_{E,S} = \sum_i \vec{E}_i \Delta \vec{S}_i = \sum_i \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \Delta S_i \cos \alpha_i = \sum_i \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Delta \Omega_i$$

где r_i – расстояния от заряда q до площадок ΔS_i , которые следует устремить к нулю, α_i – угол между вектором напряженности электрического поля и вектором площадки $\Delta \vec{S}_i$. Выражение

$$\Delta \Omega_i = \frac{\Delta S_i \cos \alpha_i}{r_i^2}$$

представляет собой телесный угол, под которым площадка ΔS_i видна из точки расположения заряда. Поскольку полное пространство соответствует телесному углу 4π , то в случае, когда заряд находится внутри рассматриваемой поверхности получаем

$$\Phi_{E,S} = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Если заряд находится вне поверхности, то $\oint_S d\Omega = 0$ и поток равен нулю.

Поток напряженности электрического поля в произвольном случае.

Напряженность электрического поля создается зарядами. В силу принципа суперпозиции полей (1.6) имеем

$$\Phi_{E,S} = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \sum_i \vec{E}_i d\vec{S} = \oint_S \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.3)$$

где $q = \sum_i q_i$ – суммарный заряд, заключенный внутри поверхности S .

Поляризованность диэлектриков. В пособии по электростатике отмечалось, что при наложении электрического поля на диэлектрик происходит его поляризация. Молекулы среды – диполи характеризуются *дипольным моментом*

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

где \vec{r}_i – радиус-векторы центров сосредоточения зарядов, q_i – их величина. Ориентированность диполей определяет поляризацию диэлектрика через вектор, называемый *поляризованностью диэлектрика*

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_i$$

где сумма берется по всем дипольным моментам, заключенным в бесконечно малом объеме ΔV вокруг рассматриваемой точки. У изотропных диэлектриков поляризованность и приложенное поле сонаправлены

$$\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E} \quad (4.4)$$

где κ – независимая от поля величина, называемая *диэлектрической восприимчивостью среды*.

Смещение. Пусть l – среднее расстояние вдоль направления поля между положительным и отрицательным зарядами диполей молекул диэлектрика, возникших в результате поляризации (рис. 4.7). Рассмотрим произвольную плоскую площадку S . При наложении поля эту площадку пересекут заряды молекул, центры которых отстоят от площадки не далее $l/2$. Число таких молекул, тем самым, равно $N = nV = n l S \cos \alpha$, где α – угол между направлением перпендикуляра к площадке и направлением поля, n – концентрация молекул диэлектрика. Заряд, прошедший через площадку при наложении поля, т.о. равен

$$q' = q_0 N = q_0 n l S \cos \alpha = p n S \cos \alpha = P S \cos \alpha = \vec{P} \vec{S} \quad (4.5)$$

где q_0 – заряды диполей молекул, $p = q_0 l$ – средний дипольный момент молекулы.

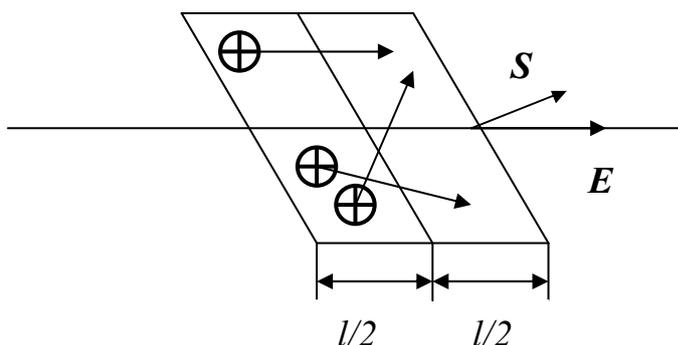


рис. 4.7

В диэлектрической среде использование вектора напряженности электрического поля не совсем удобно. В результате поляризации диэлектрика связанные заряды q' также создают некоторое распределение электрического поля E' , которое должно наряду с внешним полем E учитываться в (4.3)

$$\oint_S (\vec{E} + \vec{E}') d\vec{S} = \frac{q - q'}{\epsilon_0}$$

С учетом (4.5) это уравнение переписывается в виде

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q \quad (4.6)$$

Величина, определяемая соотношением

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

называется *электрическим смещением (э. индукцией)*. Из (4.4) имеем

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \kappa) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \quad (4.7)$$

где величина

$$\varepsilon = 1 + \kappa$$

называется *диэлектрической проницаемостью (относительной ε среды)*. В диэлектрической среде использование смещения предпочтительнее, поскольку данный вектор определяется только внешними (свободными) зарядами (4.6).

Закон Ампера. Пусть у нас имеется произвольная кривая, выберем направление движения по ней. Такую кривую будем называть *контуром* Γ . Разобьем имеющийся контур на маленькие вектора $\vec{\Delta l}_i$ так, что каждый участок контура можно считать отрезком, направление вектора совпадает с направлением кривой на данном участке. Малые вектора выбираются произвольным образом, но таким, что их объединение совпадает с исходной кривой, при этом конец предыдущего вектора $\vec{\Delta l}_{i-1}$ совпадает с началом следующего $\vec{\Delta l}_i$. Пусть у нас имеется также векторное поле \vec{B} . В силу малости векторов $\vec{\Delta l}_i$ можно считать, что векторное поле в пределах данного отрезка кривой является однородным и равным \vec{B}_i . Тогда предел суммы

$$\sum_i \vec{B}_i \vec{\Delta l}_i$$

при стремлении максимального из векторов $\vec{\Delta l}_i$ к нулю обозначается

$$\int_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} \quad (4.8)$$

Если контур Γ замкнут, то такой интеграл называется *циркуляцией векторного поля (циркуляцией вектора)* вдоль контура Γ и обозначается

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l}$$

Пусть S – произвольная поверхность, опирающаяся на данный контур, тогда (см. приложение 1)

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k \quad (4.9)$$

где сумма берется по всем токам, протыкающим данную поверхность. Ток I_k в сумме берется со знаком плюс, если при стягивании контура Γ по поверхности S к точке ее протыкания током I_k направление обхода по стянутому контуру образует с данным током в этой точке *правый винт*. В противном случае выбирается знак минус. Данное соотношение называется *законом Ампера*.

Намагниченность среды. Тела при помещении их во внешнее магнитное поле *намагничиваются* (являются *магнетиками*), т.е. приобретают магнитный момент. Согласно *гипотезе Ампера* в молекулах вещества циркулируют круговые (молекулярные) токи, обладающие магнитным моментом (см. пособие по однородным электрическому и магнитному полям). При отсутствии внешнего поля молекулярные токи ориентированы беспорядочным образом и намагниченность не проявляется. Под действием же внешнего поля магнитные моменты молекул приобретают отличную от нуля ориентацию. Намагниченность магнетика характеризуется *намагниченностью*

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{m}_i \tag{4.10}$$

где \vec{m}_i – магнитные моменты отдельных молекул, суммирование производится по объему, содержащему точку, в которой определяется намагниченность ($\Delta V \rightarrow 0$).

Напряженность магнитного поля. В случае магнитной среды в правой части (4.9) должны учитываться не только внешние макроскопические токи $I_{\text{макр}}$, но и молекулярные (микроскопические) $I_{\text{мол}}$: $I = I_{\text{макр}} + I_{\text{мол}}$. Токи $I_{\text{мол}}''$, дважды пересекающие поверхность, опирающуюся на контур Γ , не будут давать вклад в правую часть соотношения (4.9). Вклад будут давать только токи $I_{\text{мол}}'$ вблизи самого контура, пересекающие поверхность, опирающуюся на контур Γ , только один раз (нанизываемые на контур Γ , рис. 4.8). Если плотность молекулярных токов равна n , то на длине dl нанизанные на контур Γ токи дадут вклад в правую часть соотношения (4.9), равный $I_{\text{мол}}' S_{\text{мол}} \cos \alpha dl$, т.е. скалярное произведение $\vec{J} d\vec{l}$, где $S_{\text{мол}}$ – площадь, охватываемая отдельным молекулярным

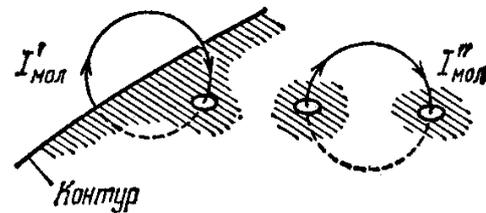


рис. 4.8

током, α – угол между направлением намагниченности \vec{J} и элементом контура $d\vec{l}$ (рис. 4.9). Тогда соотношение (4.9) можно переписать в виде

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left(\sum I_{\text{макр}} + \oint_{\Gamma} \vec{J} d\vec{l} \right)$$

Вводя напряженность магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \tag{4.11}$$

получаем соотношение

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \sum I_{\text{макр}} \tag{4.12}$$

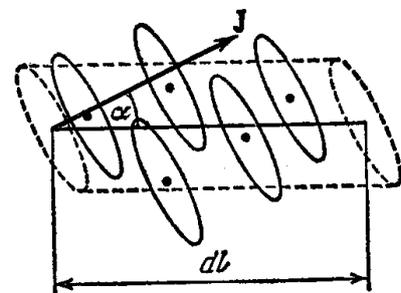


рис. 4.9

называемое *теоремой о циркуляции вектора \vec{H}* , представляющее собой одно из уравнений

Максвелла (точнее см. ниже раздел ток смещения). Оперировать с напряженностью магнитного поля удобнее по сравнению с индукцией магнитного поля, поскольку в (4.12) в отличие от (4.9) фигурируют только известные макроскопические токи, поэтому намагниченность принято связывать не с магнитной индукцией, а с напряженностью магнитного поля. В простейшем (и наиболее распространенном) случае такая связь имеет вид

$$\vec{J} = \chi \vec{H} \tag{4.13}$$

где коэффициент пропорциональности χ называется *магнитной восприимчивостью* вещества. При не слишком сильных полях в неферромагнитных веществах (см. пособие по цепям переменного тока) χ не зависит от \vec{H} . Подставляя (4.13) в (4.11) получаем

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \tag{4.14}$$

где

$$\mu = 1 + \chi$$

называется *магнитной проницаемостью* вещества.

Поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность.

Согласно (4.1) пространственное распределение вектора магнитной индукции можно получить из распределения токов. Допустим, у нас имеется элемент тока, характеризующийся вектором $d\vec{l}$, по которому идет ток I . Рассмотрим поток магнитной индукции, создаваемый этим элементом тока через произвольную поверхность S (рис. 4.10). Разрежем объем V , заключенный внутри поверхности S бесконечно близкими плоскостями, перпендикулярными $d\vec{l}$ и бесконечно близкими поверхностями цилиндра, ось которого определяет $d\vec{l}$. Таким образом, объем V представляет собой объединение изогнутых трубочек с приблизительно квадратным сечением, основания которых опираются на поверхность S . Поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность S будет равен сумме потоков через поверхности трубочек S_i .

$$\oint_S \vec{B}_{d\vec{l}} d\vec{S} = \sum_i \oint_{S_i} \vec{B}_{d\vec{l}} d\vec{S} \tag{4.15}$$

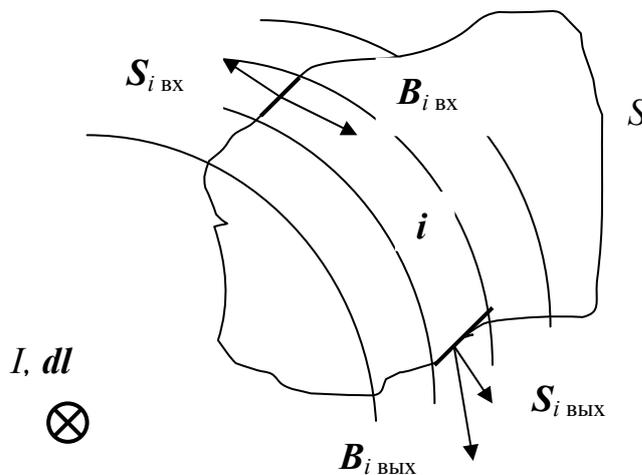


рис. 4.10

Поток вектора магнитной индукции через боковые поверхности трубочек будет равен нулю, поскольку согласно (4.1) вектор $\vec{B}_{d\vec{l}}$ перпендикулярен векторам элементарных площадок к боковым поверхностям трубочек. Вклад в поток по поверхностям трубочек будет определяться, таким образом, только потоками через основания трубочек

$$\oint_{S_i} \vec{B}_{d\vec{l}} d\vec{S} = \vec{B}_{i\text{вх}} d\vec{S}_{i\text{вх}} + \vec{B}_{i\text{вых}} d\vec{S}_{i\text{вых}}$$

Напомним, что (пособие по электростатике) в случае замкнутой поверхности вектора элементарных площадок перпендикулярны поверхности и направлены во внешнее пространство по отношению к ней. Таким образом

$$\vec{B}_{i_{\text{ВЫХ}}} d\vec{S}_{i_{\text{ВЫХ}}} = -\vec{B}_{i_{\text{ИХ}}} d\vec{S}_{i_{\text{ИХ}}} = B_i dS_{i_{\perp}}$$

где $dS_{i_{\perp}}$ – сечения рассматриваемых трубочек и

$$\oint_{S_i} \vec{B}_{d\vec{l}} d\vec{S} = 0$$

Итак, поток вектора магнитной индукции, определяемого элементом тока $d\vec{l}$, через поверхности трубочек будет равен нулю. Согласно (4.15) поток через произвольную поверхность будет равен нулю. Произвольное распределение токов можно получить, комбинируя вклады от элементов токов, от каждого из которых поток равен нулю. Следовательно, окончательно получаем, что поток вектора магнитной индукции через произвольную замкнутую поверхность равен нулю

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} \equiv 0 \quad (4.16)$$

Учитывая (4.3) данное выражение можно трактовать как отсутствие магнитных зарядов или замкнутость силовых линий магнитной индукции.

Открытие явления электромагнитной индукции. Электрическое поле может породить магнитное. При подаче напряжения на проводник в нем возникает электрическое поле, вызывающее появление тока. Ток в свою очередь согласно закону Био-Савара-Лапласа порождает магнитное поле. Может ли магнитное поле породить электрическое? Ответ на этот вопрос был получен в экспериментах Фарадея 1831 года (29 августа и 17 октября).

На катушку были намотаны изолированные друг от друга медные провода. При подсоединении одной из обмоток к батарее, во второй обмотке возникал ток. То же самое происходило и после размыкания цепи. Постоянный ток в одной из обмоток не приводил к току в другой. Протекание тока в катушке (см. задачу 6) приводит к возникновению внутри нее магнитного поля. Таким образом, меняющееся магнитное поле, создаваемое первой обмоткой, вызывало протекание тока, т.е. приводило к появлению электрического поля, в другой обмотке. Постоянное магнитное поле не приводило к появлению электрического поля.

Чтобы удостовериться в том, что именно меняющееся магнитное поле является источником электрического поля, во втором эксперименте использовалась только одна обмотка, внутрь же катушки вдвигался или выдвигался магнит. Ток в обмотке регистрировался только при движении магнита, когда магнит был неподвижен, ток отсутствовал.

Подобный эксперимент почти одновременно с Фарадеем проводил швейцарский физик Колладон. Для изоляции возможного воздействия условий эксперимента на гальванометр, последний выносился в соседнюю комнату. Эффект обнаружен не был, поскольку за время перехода Колладоном из одной комнаты в другую стрелка гальванометра успевала возвращаться к нулю.

Правило Ленца. Итак, при изменении потока магнитной индукции через замкнутый контур, в нем возникает ток. Направление тока определяется

правилом Ленца: поток магнитной индукции от возникающего тока должен компенсировать изменение внешнего потока магнитной индукции, вызывающего этот ток.

Закон электромагнитной индукции. Как мы уже знаем, ток в цепи возникает при наличии э.д.с. (см. пособие по цепям постоянного тока). Возникновение тока в контуре при изменении магнитного поля можно характеризовать скоростью изменения потока магнитной индукции через этот контур. Таким образом, можно сказать, что возникающая э.д.с. электромагнитной индукции в контуре ($\varepsilon_{\text{эми}}$) пропорциональна скорости изменения потока магнитной индукции Φ через него. Выбором единицы измерения потока магнитной индукции (Вб (Вебер) в СИ) коэффициент пропорциональности можно взять за единицу. Правило Ленца говорит нам о направлении действия возникающего э.д.с. Итак, окончательно в СИ закон электромагнитной индукции выглядит как

$$\varepsilon_{\text{эми}} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (4.17)$$

Вихревое электрическое поле. Ранее (см. пособие по электростатике) было показано, что стационарное электрическое поле является потенциальным. Электрическое поле, возникающее в явлении электромагнитной индукции, порождается меняющимся во времени магнитным полем и не является вследствие этого стационарным. Не является оно и потенциальным, поскольку работа по перемещению заряда в таком поле пропорциональна э.д.с. электромагнитной индукции и отлична от нуля (4.17). Такое электрическое поле называется *вихревым*.

Вихревое поле используется для ускорения электронов до релятивистских скоростей (близких к скорости света) в устройствах, называемых *бетатронами*. Мощное вихревое электрическое поле возникает в ускорительной камере К при быстром изменении магнитного поля сильного электромагнита М (рис. 4.11).

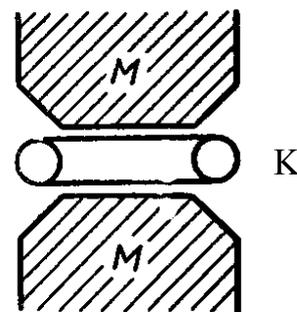


рис. 4.11

Граничные условия на границе раздела сред. Смещение. Выберем на границе раздела сред достаточно малый участок, чтобы можно было считать его плоским, а поле в его пределах однородным. Окружим его прямым цилиндром (см. вывод (1.8)) таким, что площадь его боковой поверхности много меньше площади основания (т.е. с бесконечно малой высотой). Пусть \vec{D}_i , $i = 1, 2$ – значения смещения по разные стороны границы раздела. Тогда из (4.6) следует, что

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (4.18)$$

где D_n – нормальная (перпендикулярная к границе раздела) компонента смещения, σ – плотность свободного заряда на границе раздела. При получении данного соотношения использовался факт бесконечной малости потока

смещения через боковую поверхность в силу того, что ее площадь много меньше площади оснований.

Магнитная индукция. Аналогичные рассуждения применительно к (4.16) приводят нас к соотношению

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad (4.19)$$

Напряженность электрического поля. Выберем на границе раздела сред достаточно малый участок, чтобы можно было считать его плоским, а поле в его пределах однородным. Окружим его плоским прямоугольником таким, что параллельные границе раздела основания l лежат по разные стороны границы, а его высота h много меньше основания (т.е. с бесконечно малой высотой). Пусть \vec{E}_i , $i = 1, 2$ – значения напряженности электрического поля по разные стороны границы раздела. Тогда из (4.17) имеем

$$\varepsilon = E_{2\tau}l - E_{1\tau}l = (E_{2\tau} - E_{1\tau})l = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Поскольку мы выбрали высоту прямоугольника $h \ll l$, то поток магнитной индукции через такой прямоугольный контур стремится к нулю, получаем

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \quad (4.20)$$

где E_τ – касательная (параллельная к границе раздела) компонента напряженности электрического поля.

Напряженность магнитного поля. Выберем на границе раздела сред достаточно малый участок, чтобы можно было считать его плоским, а поле в его пределах и ток, протекающий по границе раздела, однородными. Возьмем контур Γ в соотношении (4.12) в виде плоского прямоугольника, описанного в предыдущем пункте. Тогда

$$H_{2\tau}l - H_{1\tau}l = I_{\text{макр}} = il$$

где H_τ – касательная (параллельная к границе раздела) компонента напряженности магнитного поля, i – линейная плотность внешнего макроскопического тока (протекающего по полоске единичной ширины) на границе раздела. В силу $h \ll l$ вклад в циркуляцию интеграла по сторонам, перпендикулярным основанию, пренебрежимо мал. Получаем

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = i \quad (4.21)$$

Взаимная индуктивность контуров. Пусть магнитный поток в одном из контуров i создается током в другом контуре j . Поток магнитной индукции через контур i (Φ_i), создаваемый током, текущим в контуре j (I_j), пропорционален ему. Коэффициент пропорциональности L_{ij}

$$\Phi_i = L_{ij}I_j \quad (4.22)$$

называется *взаимной индуктивностью контуров*.

Самоиндукция. Магнитный поток в контуре может создаваться не только посторонним контуром (см. пред. п.), но и самим контуром. В таком случае возникающая электромагнитная индукция называется *самоиндукцией*. Если по обмотке катушки (соленоида) пускать переменный ток, то этот ток будет создавать переменный поток магнитной индукции, который будет вызывать

э.д.с. электромагнитной индукции в той же обмотке. При замыкании, например, ключа в цепи (рис. 4.12) лампочка, последовательно соединенная с резистором, включится мгновенно (пунктир, рис. 4.13). Лампочка же, последовательно соединенная с катушкой, будет включаться постепенно (кривая 2 рис. 4.13), поскольку возникающая э.д.с.

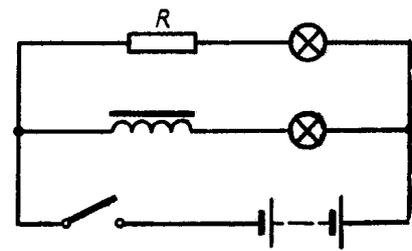


рис. 4.12

электромагнитной индукции будет препятствовать нарастанию тока. При размыкании цепи ток не будет исчезать мгновенно, как в случае отсутствия катушки в цепи (кривая 1 рис. 4.13).

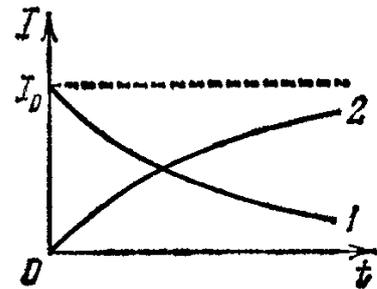


рис. 4.13

В соотношении (4.22) можно теперь опустить индексы, т.к. они относятся к одному и тому же контуру

$$\Phi = LI \tag{4.23}$$

Величина L в этом случае называется *индуктивностью контура* или *коэффициентом самоиндукции*.

Движение проводников в магнитном поле. Проиллюстрируем возможность вычисления возникающей при движении проводника э.д.с. на основе соотношения (4.17). По определению (см. пособие по цепям постоянного тока) э.д.с. есть работа сторонних сил по перемещению единичного заряда вдоль замкнутого контура.

Сторонней силой в данном случае выступает сила Лоренца, ее модуль равен (рис. 4.14)

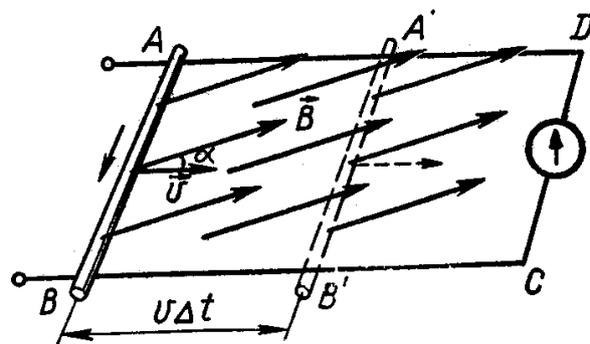


рис. 4.14

$$F = qvB \sin \alpha$$

Эта работа совершается только вдоль движущегося проводника ($l = AB$)

$$\varepsilon = \frac{A}{q} = \frac{\vec{F}\vec{l}}{q} = \frac{Fl}{q} = vBl \sin \alpha \tag{4.24}$$

Поток магнитной индукции через замкнутый контур равен

$$\Phi = \vec{B}\vec{S} = BS \cos(\pi/2 - \alpha) = B \cdot AB(BC - v\Delta t) \sin(\alpha) = B \cdot AB(BC - vt) \sin(\alpha)$$

где $t = 0$ соответствует времени начала движения проводника. Из (4.17) имеем

$$\varepsilon_{\text{эми}} = -\frac{d\Phi}{dt} = B \cdot ABv \sin \alpha = Blv \sin \alpha$$

что совпадает с (4.24).

Напряжение на катушке индуктивности. В результате процесса самоиндукции в катушке индуктивности появляется э.д.с. (4.17), которая согласно (4.23) можно представить в виде (если индуктивность не меняется во времени)

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Согласно второму правилу Кирхгофа (2.8) мы можем говорить не об э.д.с., а о напряжении, поменяв знак при э.д.с. Другими словами, мы можем слагаемое в левой части (2.8), соответствующее э.д.с. самоиндукции, перенести в правую часть, изменив знак, и интерпретировать его теперь как напряжение на катушке индуктивности

$$U_L = L \frac{dI}{dt} \tag{4.25}$$

Результирующая индуктивность при последовательном соединении индуктивностей. Пусть у нас имеется n последовательно соединенных индуктивностей (рис. 4.15). Можно ли заменить их одной индуктивностью и если можно, то каково должно быть ее значение L ?

Рассмотрим результирующее падение напряжения. Имеем

$$U = \varphi_1 - \varphi_0 = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + (\varphi_n - \varphi_0) = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

В силу первого правила Кирхгофа (2.7) через каждое из индуктивностей протекает один и тот же ток I . Напряжение на каждой из индуктивностей равно (4.25), поэтому

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = I'L_1 + I'L_2 + \dots + I'L_n = I'(L_1 + L_2 + \dots + L_n) = I'L$$

Если производная от тока отлична от нуля (если ток постоянен, то на катушке нет напряжения), из последнего равенства следует, что последовательное соединение индуктивностей действительно можно заменить одним, причем

$$L = L_1 + L_1 + \dots + L_1 = \sum_{i=1}^n L_i \tag{4.26}$$

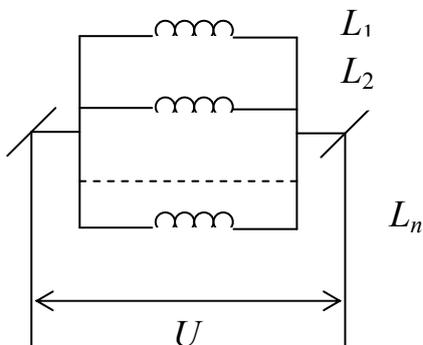


рис. 4.16

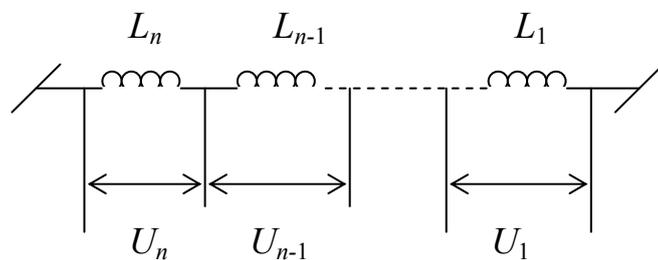


рис. 4.15

Результирующая индуктивность при параллельном соединении индуктивностей. При параллельном соединении напряжение на каждой из

индуктивностей одно и тоже $U = U_i$ (рис. 4.16). В силу первого правила Кирхгофа (2.7) ток I , протекающий через параллельное соединение равен сумме токов I_i , протекающих через каждое из индуктивностей

$$I = I_1 + I_1 + \dots + I_1 = \sum_{i=1}^n I_i \quad (4.27)$$

Используя для каждой из индуктивностей (4.25), получаем из (4.27)

$$\frac{U}{L} = I' = \sum_{i=1}^n I'_i = \sum_{i=1}^n \frac{U_i}{L_i} = U \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i}$$

Если напряжение отлично от нуля, из последнего равенства следует, что параллельное соединение n индуктивностей действительно можно заменить одной, причем ее значение L определяется как

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i} \quad (4.28)$$

Энергия катушки с индуктивностью. Энергия катушки индуктивности, по которой идет ток J , определяется работой поля по перемещению заряда в катушке с момента подачи на нее напряжения до момента времени τ , когда ток через нее оказывается равным J . В соответствии с (2.5)

$$W = \int_0^\tau UI dt = \int_0^\tau LI \frac{dI}{dt} dt = \int_0^J LI dI = \frac{LJ^2}{2} \quad (4.29)$$

где для напряжения на катушке использовалось соотношение (4.25). Для вычисления интеграла можно использовать предел суммы арифметической прогрессии (см. пособие по поверхностному натяжению, замечание 2 приложения 1).

Плотность энергии магнитного поля. Рассмотрим катушку индуктивности длиной l , на которой уместается N витков (см. задачу 6). Для вычисления энергии (4.29), содержащейся в катушке, найдем ее индуктивность. Поток магнитной индукции через N витков равен

$$\Phi = N\vec{B}\vec{S} = NBS = \pi r^2 n l B = \pi r^2 n l \mu_0 \mu n I = \pi r^2 l \mu_0 \mu n^2 I$$

где $n = N/l$ – плотность витков катушки, r – радиус катушки, S – площадь, охватываемая одним витком, для магнитной индукции B использовался результат задачи 6: $B = \mu_0 \mu H = \mu_0 \mu n I$. Согласно (4.23) индуктивность катушки равна

$$L = \Phi/I = \pi r^2 l \mu_0 \mu n^2$$

соответственно, энергия (4.29), содержащаяся в ней, равна

$$W = \frac{LI^2}{2} = \pi r^2 l \frac{\mu_0 \mu n^2 I^2}{2} = \pi r^2 l \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$$

а плотность энергии

$$w_H = \frac{W}{V} = \frac{W}{\pi r^2 l} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} \quad (4.30)$$

где использовалось выражение $H = nI$ (см. результат задачи 6).

Отметим, хотя выражение (4.30) получено для стационарного, однородного магнитного поля, оно справедливо в общем случае (при произвольной пространственной (или временной) зависимости поля, в малой окрестности точки (в течение достаточно малого промежутка времени) поле можно считать стационарным и однородным).

4.3 Заключение

Ток смещения. Рассмотрим уравнение (4.12).

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S}$$

Суммарный ток в правой части записан как $\sum I_{\text{макр}} = \int_S \vec{j} d\vec{S}$. Мы можем брать произвольную поверхность S , опирающуюся на контур Γ . Рассмотрим, например, случай зарядки конденсатора (рис. 4.17). Если в качестве поверхности возьмем поверхность S_1 , то эту поверхность пронизывает ток $I(t) \neq 0$ и в правой части уравнения

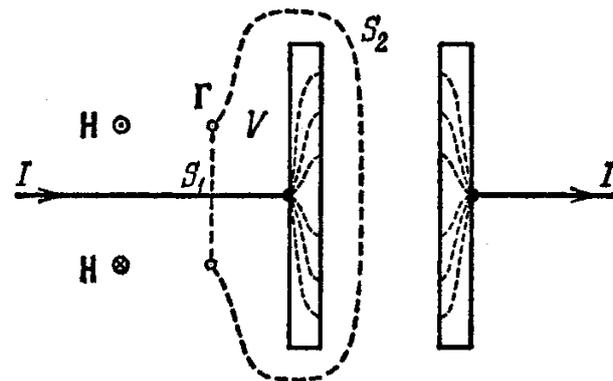


рис. 4.17

присутствует отличная от нуля функция. Если же в качестве поверхности возьмем поверхность S_2 , то, поскольку содержащийся между обкладками конденсатора диэлектрик тока не проводит, получаем, что правая часть содержит нуль.

Итак, данное уравнение должно быть модифицировано для того, чтобы не возникало противоречий с нестационарным случаем. Максвелл предлагает его модифицировать следующим образом

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S} \quad (4.31)$$

Второе слагаемое правой части называется *током смещения*. Отметим, что на момент вывода этого уравнения у Максвелла не было никаких экспериментальных оснований для введения такого члена. Почему же предложенная им модификация (4.31) уравнения (4.12) имеет именно такой вид? Уравнения Максвелла с таким слагаемым допускает решение в виде *волны* (*электромагнитной*). Это очень интересное следствие, позволяющее объяснить природу света, само по себе достойно для анализа такой ситуации. Вполне вероятно, что Максвелл и стремился к этому – к объяснению света электромагнитной теорией. Напомним (см. введение), что Максвелл в первую очередь сосредотачивается на работах Фарадея перед тем, как приступить к обобщению опытных данных. Например, в работе Фарадея «Размышления о вибрации лучей» (1846) говорится (без доказательства) о возможности распространения возмущений в «линиях силы» со скоростью света. Вывод

волнового уравнения содержится у Максвелла в его третьей работе (1864-1865, см. введение), но уже во второй работе (1861) как главный ее результат он формулирует: «... мы едва ли можем отказаться от вывода, что свет состоит из поперечных колебаний той же самой среды, которая является причиной электрических и магнитных явлений». Были и экспериментальные основания к такому заключению. Измерения Вебером и Кольраушем (1857) размерного множителя между напряженностью электрического и магнитного полей привели к значению $3.1074 \cdot 10^{10}$ см/с, что оказалось очень близким к известной из опыта Физо скорости света $c = 3.1486 \cdot 10^{10}$ см/с. В этом же году Кирхгоф обнаружил, что скорость распространения тока по проводам также близка к c .

В своих работах Максвелл для обоснования нового математического аппарата использует механическую аналогию. С одной стороны, это совершенно естественно, поскольку в то время полностью доминировали механистические представления на природу нашего мира, считалось, что механические уравнения (Ньютона) полностью описывают реальный мир. С другой стороны, это позволяет ему обосновать введение тока смещения. В первой работе (1856) используется гипотетическая несжимаемая жидкость, заполняющая пространство, характеризующаяся сопротивлением (пропорциональным скорости перемещения), давлением и т.д. Во второй работе (1861) рассматривается механизм холостых колес с подвижными центрами (такая конструкция, как отмечает Максвелл, используется в эпициклических дифференциальных зубчатых передачах и других приспособлениях, как, например, в регуляторе Сименса для паровых машин).

Обычная механическая волна предполагает наличие упругой среды, по которой она распространяется. Долгое время считалось, что для распространения электромагнитных волн также необходима среда, названная *эфиром*. Таким образом, модель Максвелла можно считать первой моделью эфира. Однако, созданная механическая картина не позволяла полностью описать предмет исследования. Максвелл надеется, что при более внимательном изучении свойств упругих тел и движения вязких жидкостей ему удастся подобрать соответствующий механический образ. Хэвисайд отмечал, что максвелловская теория должна остаться Бумажной Теорией до тех пор, пока мы не узнаем, какие функции эфира описывают \mathbf{D} и \mathbf{B} . Максвеллу приходится следовать логике самих уравнений, признавая неполноту аналогий и оставляя мысль о материальном носителе. В третьей работе (1864-1865) он работает уже с понятием поля как самостоятельной реальностью и демонстрирует, что достаточно иметь только уравнения для поля, – эфир не нужен. Отметим (см. пособие по специальной теории относительности), что поиск эфира и эфирного ветра привел к отрицательным результатам. На данный момент считается, что эфир отсутствует, электромагнитные волны распространяются в пустоте, т.е. в *вакууме*, хотя работы по обоснованию и поискам эфира до сих пор продолжаются.

Уравнения Максвелла в интегральном и дифференциальном видах.

Итак, выпишем окончательно уравнения Максвелла в интегральной форме

$$\text{Первая пара (4.17), (4.16):} \quad \oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} \equiv 0$$

$$\text{Вторая пара (4.31), (4.6):} \quad \oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

где ρ, \vec{j} – соответственно плотности внешних зарядов и тока.

Замечание. Уравнения в интегральной форме используются сравнительно редко. Приведем также наиболее часто употребляемые формы. Для их обоснования требуется владение математическим аппаратом теории векторных полей (теоремы Гаусса-Остроградского, Стокса) и дифференциальных форм, поэтому приводим их без доказательства, просто как иллюстрацию современной записи этих уравнений

$$\text{Первая пара:} \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{или} \quad [\vec{\nabla}, \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \vec{B} = 0$$

$$\text{Вторая пара:} \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{или} \quad [\vec{\nabla}, \vec{H}] = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho \quad \vec{\nabla} \vec{D} = \rho$$

Две пары уравнений содержат восемь уравнений, поэтому их необходимо дополнить уравнениями связи \vec{D}, \vec{H} с \vec{j}, \vec{E} и \vec{B} . В простейшем виде – это, например, уравнения (4.7), (4.14), (2.18)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

В более сложных случаях эта связь осуществляется через тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости веществ.

В вакууме ($\varepsilon = 1, \mu = 1$) первая пара уравнений может быть записана в виде

$$d\Omega = 0 \quad (4.32)$$

где

$$\Omega = \mu_0 E_x dx \wedge dt + \mu_0 E_y dy \wedge dt + \mu_0 E_z dz \wedge dt + H_x dy \wedge dz + H_y dz \wedge dx + H_z dx \wedge dy$$

В четырехмерном пространстве $R^4(x, y, z, t)$ 2-форма Ω точна, т.е. она представляется в виде

$$\Omega = d\omega \quad (4.33)$$

где ω – некоторая 1-форма

$$\omega = A_x dx + A_y dy + A_z dz + A_t dt$$

В обозначениях $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z, x^4 = ct$ формы Ω и ω записываются в виде

$$\Omega = F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \omega = A_\mu dx^\mu$$

где по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Отмеченный выше факт (4.33) предполагает зависимость между компонентами форм

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad \mu < \nu \quad (4.34)$$

Поскольку эти соотношения являются следствием (4.32), (4.33), то они также называются уравнениями Максвелла. Как 2-форма Ω , так и $F_{\mu\nu}$ называются *тензором электромагнитного поля*, 1-форма ω и A_μ называются *4-потенциалом электромагнитного поля*.

Чаще связь (4.34) используется в качестве определения тензора электромагнитного поля, тогда первая пара уравнений (4.32) имеет вид

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = 0$$

а вторая

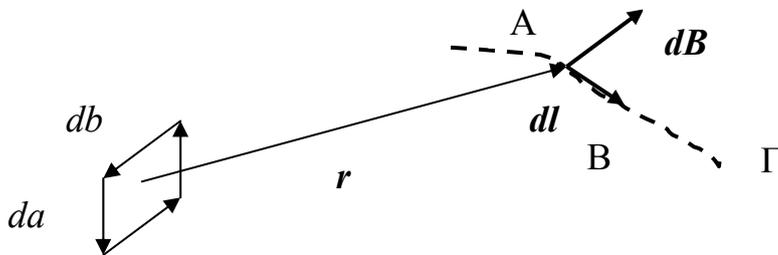
$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{j^\mu}{c}$$

где $j^\mu = (j^1, j^2, j^3, c\rho)$ – *4-вектор плотности тока*.

Приложение 1 Вывод формулы Ампера

Найдем вектор магнитной индукции, создаваемый рамкой со сторонами da и db (см. рис.), по которой течет ток I , в точке, определяемой радиусом вектором r , выходящим из центра рамки. Согласно закону Био-Савара-Лапласа (4.1) вклад от сторон da равен

$$d\vec{B}_{da} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{[d\vec{a}, \vec{r} + \frac{d\vec{b}}{2}]}{|\vec{r} + \frac{d\vec{b}}{2}|^3} - \frac{[d\vec{a}, \vec{r} - \frac{d\vec{b}}{2}]}{|\vec{r} - \frac{d\vec{b}}{2}|^3} \right)$$



Раскроем скобки в векторном произведении и учтем слагаемые первого порядка малости в выражениях знаменателя по c :

$$(\vec{r} \pm d\vec{c})^2 = (\vec{r}\vec{r}) \pm 2(\vec{r}\vec{c}) + (\vec{c}\vec{c}) = r^2 \pm 2(\vec{r}\vec{c}) + c^2 \approx r^2 \pm 2(\vec{r}\vec{c})$$

получаем

$$d\vec{B}_{da} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{[d\vec{a}, \vec{r}] + [d\vec{a}, \frac{d\vec{b}}{2}]}{r^3 \left| 1 + \frac{(\vec{r}d\vec{b})}{r^2} \right|^{3/2}} - \frac{[d\vec{a}, \vec{r}] - [d\vec{a}, \frac{d\vec{b}}{2}]}{r^3 \left| 1 - \frac{(\vec{r}d\vec{b})}{r^2} \right|^{3/2}} \right)$$

Используя разложение для функций в знаменателе (см. справочник-указатель) имеем

$$d\vec{B}_{da} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{[d\vec{a}, \vec{r}] + [d\vec{a}, d\vec{b}/2]}{r^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{(\vec{r}d\vec{b})}{r^2} \right) - \frac{[d\vec{a}, \vec{r}] - [d\vec{a}, d\vec{b}/2]}{r^3} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{(\vec{r}d\vec{b})}{r^2} \right) \right)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получаем

$$d\vec{B}_{da} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{[d\vec{a}, d\vec{b}]}{r^3} - 3 \frac{[d\vec{a}, \vec{r}](\vec{r}d\vec{b})}{r^5} \right)$$

Вклад от сторон db аналогичен

$$d\vec{B}_{db} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{[d\vec{a}, d\vec{b}]}{r^3} - 3 \frac{[d\vec{b}, \vec{r}](\vec{r}d\vec{a})}{r^5} \right)$$

Окончательно, суммарный вклад от сторон da и db равен

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(2 \frac{[d\vec{a}, d\vec{b}]}{r^3} - 3 \frac{[d\vec{a}, \vec{r}](\vec{r}d\vec{b})}{r^5} - 3 \frac{[d\vec{b}, \vec{r}](\vec{r}d\vec{a})}{r^5} \right) \quad (4.35)$$

Циркуляция данного вектора по контуру Γ ($\int_{\Gamma} d\vec{B}d\vec{l}$) оперирует со слагаемыми вида (второе и третье слагаемые в (4.35))

$$([d\vec{a}, \vec{r}]d\vec{l})(\vec{r}d\vec{b}) + ([d\vec{b}, \vec{r}]d\vec{l})(\vec{r}d\vec{a})$$

представляющими собой скалярное произведение вектора \mathbf{r} на вектор

$$([d\vec{a}, \vec{r}]d\vec{l})d\vec{b} + ([d\vec{b}, \vec{r}]d\vec{l})d\vec{a}$$

который в силу свойств смешанного произведения (см. 2 приложение 2) равен

$$([\vec{r}, d\vec{l}]d\vec{a})d\vec{b} + ([\vec{r}, d\vec{l}]d\vec{b})d\vec{a}$$

Этот вектор в силу свойств векторного произведения (см. 1 приложение 2) можно переписать в виде

$$[[\vec{r}, d\vec{l}], [d\vec{b}, d\vec{a}]]$$

Скалярное произведение его на вектор \mathbf{r} в силу циклической перестановочности векторов в смешанном произведении (см. 2 приложение 2) равно

$$([[d\vec{b}, d\vec{a}], \vec{r}][\vec{r}d\vec{l}]) \quad (4.36)$$

Данное выражение по теореме косинусов для трехгранного угла можно связать со скалярными произведениями векторов \mathbf{n} , $d\vec{l}$ и \mathbf{r} (приложение 3)

$$(\vec{n}d\vec{l}) = \frac{(\vec{n}\vec{r})(\vec{r}d\vec{l})}{r^2} + \frac{([\vec{n}, \vec{r}][\vec{r}, d\vec{l}])}{r^2} \quad (4.37)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор в направлении $[d\vec{a}, d\vec{b}]$. Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах (см. 1 приложение 2), следовательно, скалярное произведение выражения, содержащегося в скобках (4.35), на $d\vec{l}$ равно

$$2 \frac{dS(\vec{n}d\vec{l})}{r^3} - 3 \frac{([d\vec{a}, \vec{r}]d\vec{l})(\vec{r}d\vec{b}) + ([d\vec{b}, \vec{r}]d\vec{l})(\vec{r}d\vec{a})}{r^5}$$

Числитель второго слагаемого заменяем на (4.36), которое в свою очередь при использовании (4.37) приводит к выражению

$$2 \frac{dS(\vec{n}d\vec{l})}{r^3} - 3 \frac{(\vec{n}\vec{r})(\vec{r}d\vec{l}) - r^2(\vec{n}d\vec{l})}{r^5} = - \frac{dS(\vec{n}d\vec{l})}{r^3} + 3 \frac{(\vec{n}\vec{r})(\vec{r}d\vec{l})}{r^5} \quad (4.38)$$

Изменение телесного угла при переходе от точки А до точки В, отстоящих друг от друга на вектор $d\vec{l}$, равно (см. рис.)

$$d\Omega = \frac{dS \cos \beta_1}{|\vec{r} + d\vec{l}|^2} - \frac{dS \cos \beta}{r^2} = dS \left(\frac{(\vec{n}, \vec{r} + d\vec{l})}{|\vec{r} + d\vec{l}|^3} - \frac{(\vec{n}\vec{r})}{r^3} \right)$$

Данное выражение можно переписать в виде

$$d\Omega = dS \left(\frac{(\vec{n}\vec{r}) + (\vec{n}d\vec{l})}{r^3 \left| 1 + \frac{2(\vec{r}d\vec{l})}{r^2} \right|^{3/2}} - \frac{(\vec{n}\vec{r})}{r^3} \right)$$

которое при использовании разложения функции в знаменателе, (см. справочник-указатель) переходит в

$$d\Omega = dS \left(\frac{(\vec{n}\vec{r}) + (\vec{n}d\vec{l})}{r^3} \left(1 - \frac{3(\vec{r}d\vec{l})}{r^2} \right) - \frac{(\vec{n}\vec{r})}{r^3} \right) = dS \left(\frac{(\vec{n}d\vec{l})}{r^3} - \frac{3(\vec{n}\vec{r})(\vec{r}d\vec{l})}{r^5} \right)$$

Сравнивая с (4.35), (4.38) получаем

$$d\vec{B}d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega$$

Если замкнутый контур Γ протыкает рамку со сторонами da и db , то изменение телесного угла, под которым видна рамка при обходе по нему, равно 4π . Соответственно, циркуляция по нему вектора магнитной индукции, им создаваемой, равна

$$\int_{\Gamma} d\vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I$$

Если же этот контур Γ не протыкает рамку, то изменение телесного угла, под которым видна рамка при обходе по нему, равно 0 , и циркуляция по нему также равна нулю.

При выводе закона Ампера использовались соотношения

$$r \gg dl, r \gg a, b \quad (4.39)$$

Первое всегда можно удовлетворить уменьшением dl . Разобьем рамку с током на более мелкие непересекающиеся рамки со сторонами da_i, db_i так, что их объединение представляет собой исходную рамку. Если контур Γ не протыкает рамку, то соответствующим выбором измельчения всегда можно удовлетворить второму соотношению (4.39). Если контур Γ протыкает рамку, то можно переходить к более мелкому измельчению по мере приближения r к нулю.

Замечание. В этом случае интеграл определяется той рамкой измельчения, которую протыкает контур Γ , причем практически все его значение приходится на область размеров порядка размеров рамки (см. задачу 2).

Для произвольного замкнутого контура с током I закон Ампера получается представлением этого контура объединением большого числа (в пределе бесконечного) малых прямоугольных контуров с применением к каждому из них доказанного соотношения.

Приложение 2

Свойства векторного произведения

1) Модуль векторного произведения $[a, b]$ равен площади параллелограмма S , построенного на приведенных к общему началу векторах a и b .

Доказательство очевидно следует из определения модуля векторного произведения (см. пособие по однородным электрическому и магнитному полям).

Тройка векторов a , b и c называется *правой* (*левой*), если после приведения к общему началу векторов a , b , c и $[a, b]$, вектора $[a, b]$ и c лежат по одну сторону (разные стороны) от плоскости, в которой лежат вектора a и b .

Пример. Тройка векторов a , b и $[a, b]$ является правой для не коллинеарных векторов a и b .

Замечание. Понятие правой и левой тройки теряет смысл для *компланарных* (т.е. лежащих в одной плоскости) векторов.

2) Скалярное произведение $([a, b]c)$, т.е. *смешанное произведение векторов a , b и c* , равно по модулю объему параллелепипеда V , построенного на приведенных к общему началу векторах a , b и c . В случае $V \neq 0$ смешанное произведение положительно, если тройка векторов a , b и c правая и отрицательно, если эта тройка левая.

Доказательство. На основании свойства 1) имеем

$$([\vec{a}, \vec{b}] \vec{c}) = S(\vec{e} \vec{c})$$

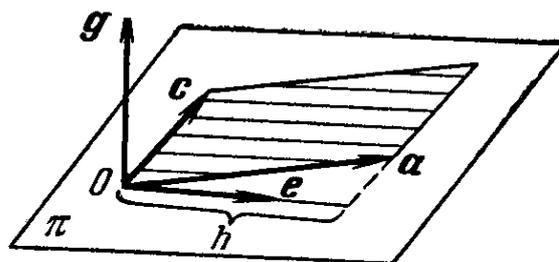
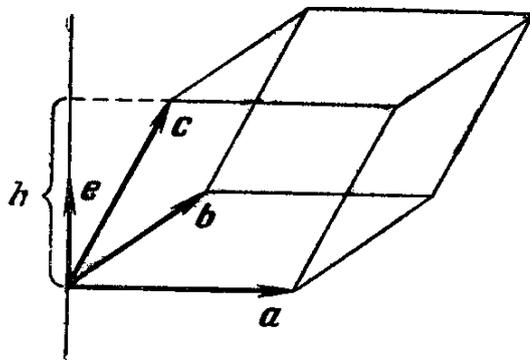
где e – единичный вектор, сонаправленный с вектором $[a, b]$. Для некопланарных векторов a , b и c очевидно, что скалярное произведение (ec) равно высоте параллелепипеда (см. рис.) если тройка векторов правая и равно высоте со знаком минус, если тройка левая.

3) $[\vec{b}, [\vec{a}, \vec{c}]] = \vec{a}(\vec{b} \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \vec{b})$

Доказательство. Если вектора a и c коллинеарны, то слева и справа от равенства стоят нули, следовательно, соотношение справедливо.

Если вектора a и c не коллинеарны, то, поскольку вектор $[a, c]$ ортогонален плоскости π (см. рис.), в которой лежат вектора a и c , вектор $[b, [a, c]]$ компланарен векторам

a и c , следовательно, существуют такие числа α и γ , что



$$[\vec{b}, [\vec{a}, \vec{c}]] = \alpha \vec{a} + \gamma \vec{c} \quad (1)$$

Докажем, что $\alpha = (\mathbf{bc})$. Пусть \mathbf{e} – единичный вектор, ортогональный к \mathbf{c} и лежащий в плоскости π , \mathbf{g} – единичный вектор, ортогональный к плоскости π такой, что тройка векторов \mathbf{ecg} является правой. Тогда по определению векторного произведения

$$[\vec{a}, \vec{c}] = ac \sin(\vec{a}, \vec{c}) \vec{g} = c(\vec{a}\vec{e}) \vec{g} \quad (2)$$

поскольку $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \cos(\mathbf{a}, \mathbf{e})$. Пусть \mathbf{c}_0 – орт вектора \mathbf{c} . Разложим вектор \mathbf{a} по базису $\mathbf{ec}_0\mathbf{g}$

$$\vec{a} = (\vec{a}\vec{e})\vec{e} + (\vec{a}\vec{c}_0)\vec{c}_0 + (\vec{a}\vec{g})\vec{g} \quad (3)$$

Умножим векторно (3) на (2) и учтем, что $[\mathbf{e}, \mathbf{g}] = -\mathbf{c}_0$, $[\mathbf{c}_0, \mathbf{g}] = \mathbf{e}$, $[\mathbf{g}, \mathbf{g}] = 0$, получим

$$[\vec{b}, [\vec{a}, \vec{c}]] = -c(\vec{a}\vec{e})(\vec{b}\vec{e})\vec{c}_0 + c(\vec{a}\vec{e})(\vec{b}\vec{e})\vec{e} \quad (4)$$

Сравнивая (1) и (4) имеем

$$\alpha \vec{a} + \gamma \vec{c} = -c(\vec{a}\vec{e})(\vec{b}\vec{e})\vec{c}_0 + c(\vec{a}\vec{e})(\vec{b}\vec{e})\vec{e} \quad (5)$$

Умножим обе части (5) скалярно на \mathbf{e} и учтем, что $(\mathbf{ec}_0) = 0$, $(\mathbf{ee}) = 1$, получим $\alpha = (\mathbf{bc})$. Для доказательства равенства $\gamma = -(\mathbf{ab})$ следует в проведенных рассуждениях поменять ролями векторы \mathbf{c} и \mathbf{a} и учесть, что $[\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] = -[\mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{c}]]$.

В заключение приведем алгебраические свойства векторного произведения. Для произвольных векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} имеем:

- а) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ (антиперестановочное свойство)
- б) $[\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}] = \alpha [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ (сочетательное свойство, α – произвольное число)
- в) $[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{c}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ (распределительное свойство)
- г) $[\mathbf{a}, \mathbf{a}] = 0$

Приложение 3

Теорема косинусов для трехгранного угла

Теорема. Косинус плоского угла трехгранного угла равен произведению косинусов двух остальных плоских углов, сложенному с произведением синусов тех же углов и косинуса двугранного угла, плоскости которого содержат эти углы.

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A$$

Доказательство. На ребрах трехгранного угла отложим единичные векторы (см. рис.)

$$\vec{e}_1 = \vec{SA}, \vec{e}_2 = \vec{SB}, \vec{e}_3 = \vec{SC}$$

Для отрезков BM и CN , перпендикулярных прямой SA , имеем

$$|NC| = \sin \beta, \vec{SN} = \vec{e}_1 \cos \beta$$

$$|MB| = \sin \gamma, \vec{SM} = \vec{e}_1 \cos \gamma$$

Перемножая скалярно вектора

$$\vec{e}_3 = \vec{SN} + \vec{NC} = \vec{e}_1 \cos \beta + \vec{NC}$$

$$\vec{e}_2 = \vec{SM} + \vec{MB} = \vec{e}_1 \cos \gamma + \vec{MB}$$

получим

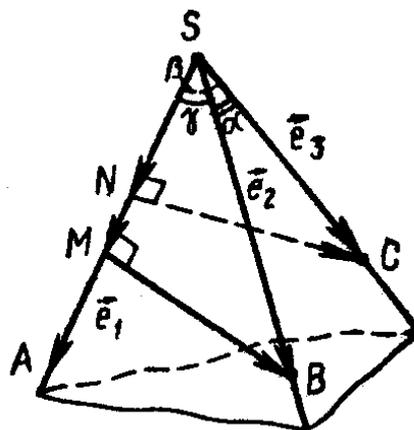
$$\vec{e}_3 \vec{e}_2 = \vec{e}_1^2 \cos \beta \cos \gamma + \vec{NC} \cdot \vec{MB}$$

поскольку $\vec{NC}, \vec{MB} \perp \vec{e}_1$. Окончательно

имеем

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A$$

где A – угол между векторами \vec{MB} и \vec{NC} .



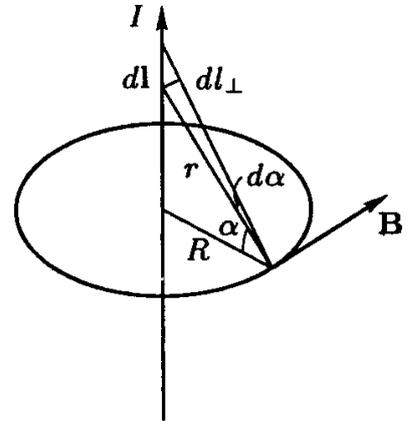
Примеры решения задач

1. Из закона Био-Савара-Лапласа определить магнитную индукцию, создаваемую прямолинейным проводом, по которому течет ток I .

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$.

Решение. Из (4.1) видно, что магнитные силовые линии будут представлять собой окружности перпендикулярные проводу, центры которых лежат на нем (см. рис.). Из свойств векторного произведения имеем

$$|[\vec{dl}, \vec{r}]| = rdl \sin(\vec{dl}, \vec{r}) = rdl_{\perp} = r^2 d\alpha$$



Следовательно, элемент тока $Id\vec{l}$ на расстоянии $R = r\cos\alpha$ от провода создает индукцию

$$|d\vec{B}_{dl}| = \left| \frac{\mu_0 I [\vec{dl}, \vec{r}]}{4\pi r^3} \right| = \frac{\mu_0 Idl_{\perp}}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 Id\alpha}{4\pi r} = \frac{\mu_0 I \cos \alpha d\alpha}{4\pi R}$$

Поскольку $d\vec{B}_{dl}$ сонаправлены от всех элементов тока $Id\vec{l}$, то учет всех элементов тока провода приводит к выражению

$$B = \int |d\vec{B}_{dl}| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 I \cos \alpha d\alpha}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{4\pi R} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

2. Показать, что выполняется закон Ампера (4.9) для магнитной индукции, создаваемой прямым проводом (см. задачу 1).

Решение. А) Пусть замкнутый контур Γ лежит в плоскости, перпендикулярной току. Тогда для каждого $d\vec{l}$ имеем с учетом результата задачи 1

$$\vec{B}d\vec{l} = Bdl \cos(\vec{B}, d\vec{l}) = Bb d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha$$

(рис. а, ток направлен за плоскость чертежа и проходит через нее в точке O), поскольку в каждой точке магнитная индукция направлена по касательной к окружности с центром в точке O . Получаем

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_{\Gamma} d\alpha = \mu_0 I \quad (1)$$

если ток охватывается контуром. Если он не охватывается контуром, то при обходе по

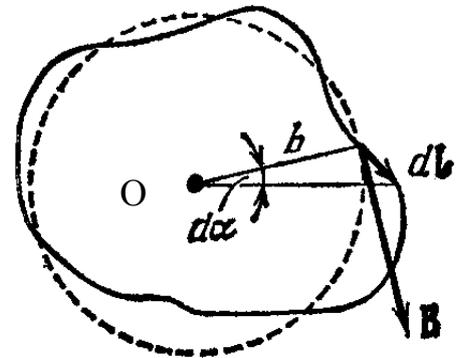


рис. а

контур радиальная прямая поворачивается сначала в положительном направлении (рис. б, точки контура, лежащие ближе к точке O , участок 1-2), а затем в отрицательном направлении (рис. б, точки контура, лежащие дальше от точки O , участок 2-1). В результате $\oint_{\Gamma} d\alpha = 0$, следовательно, мы получаем соотношение (1), в правой части которого стоит 0, поскольку контур не охватывает тока, следовательно, в нем нужно взять $I = 0$.

Б) В случае произвольного контура все выкладки остаются справедливыми, только под $d\alpha$ следует подразумевать проекцию угла, соответствующего $d\vec{l}$, на перпендикулярную к току плоскость (рис. в).

3. Индукция магнитного поля B , переходя через плоскую поверхность, меняет угол наклона к ней с α на β (см. рис.). Во сколько раз изменится индукция поля? Чему равна линейная плотность тока на поверхности?

Ответ: $B' = B \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$,
 $i = \frac{B \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1)}{\mu_0}$.

Решение. Согласно (4.19) нормальная к поверхности раздела компонента магнитной индукции не меняется, следовательно

$$B' = B \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

С учетом (4.14) получаем из (4.21)

$$i = H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{B' \cos \beta - B \cos \alpha}{\mu_0} = \frac{B \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1)}{\mu_0}$$

4. Внутри диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ имеется однородное электрическое поле, напряженность которого равна E . Найти напряженность электрического поля внутри 1) длинного и тонкого цилиндрического канала, параллельного полю E , 2) короткого цилиндрического канала с основаниями, перпендикулярными полю E .

Уравнения Максвелла

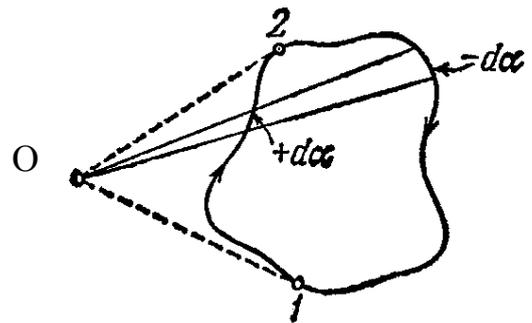


рис. б

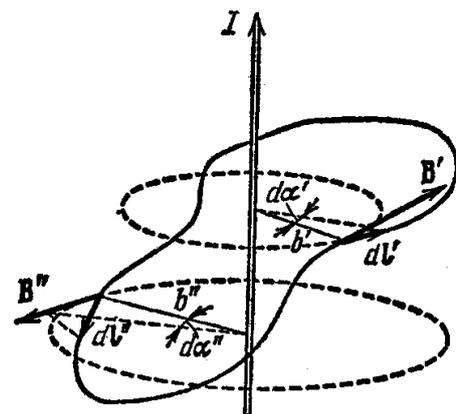
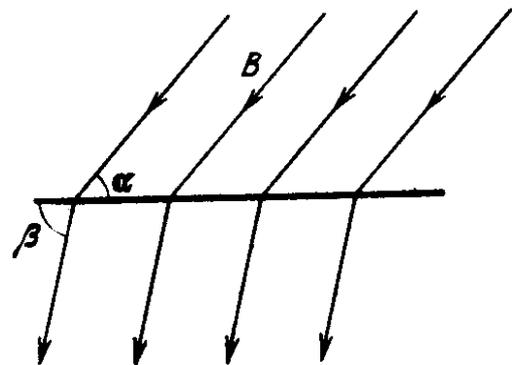


рис. в



Ответ: $E_1 = E, E_2 = \epsilon E$.

Решение. 1) Удаление вещества из тонкого канала слабо меняет поле в окружающем диэлектрике. Чем тоньше щель, тем меньше меняется поле. Если щель достаточно длинная, то вдали от концов щели влияние поляризационных зарядов, располагающихся на них, на поле внутри щели также мало. Согласно (4.20) для напряженности электрического поля внутри щели имеем (рис. 1)

$$E_1 = E$$

2) Удаление вещества из тонкой полости слабо меняет поле в окружающем диэлектрике. Наличие поляризационных зарядов на основаниях щели не влияет на напряженность поля в диэлектрике.

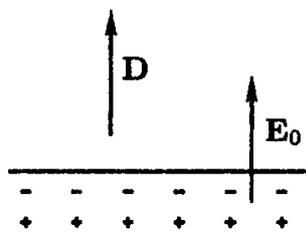


рис. 2

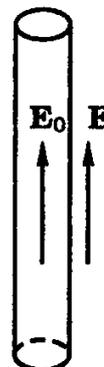


рис. 1

Доказательство аналогично

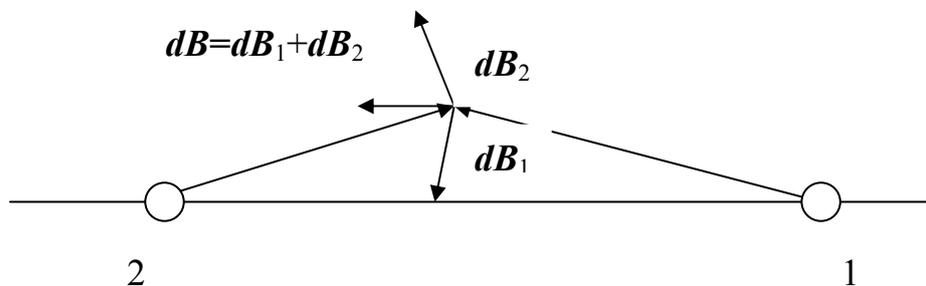
доказательству отсутствия поля вне обкладок плоского конденсатора (см. пособие по электростатике). Согласно (4.18) для напряженности электрического поля внутри щели имеем (рис. 2)

$$E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_0} = \frac{D}{\epsilon_0} = \epsilon E$$

5. Чему равна напряженность (индукция) магнитного поля бесконечной плоскости, по которой течет ток линейной плотности i ?

Ответ: $H = i/2, B = \mu_0 \mu i/2$.

Решение. Выберем произвольную точку над плоскостью, пусть ток направлен на нас. Согласно (4.1) полоски с током одинаковой ширины, симметрично расположенные относительно проекции рассматриваемой точки на плоскость, дадут вклад в индукцию, направленный влево (см. рис.). Каждая



пара симметричных полосок даст вклад также направленный влево, поэтому индукция магнитного поля, создаваемая плоскостью, направлена влево. Из симметрии задачи индукция ниже плоскости направлена вправо. Возьмем контур Γ в виде прямоугольника, основания которого параллельны плоскости и

расположены на одинаковом расстоянии от нее (боковые стороны, соответственно, перпендикулярны плоскости). Напряженность магнитного поля сонаправлена с индукцией. Из (4.12) получаем, что

$$\int_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \vec{H}\vec{a} + (-\vec{H})(-\vec{a}) = 2Ha = I = ia \quad (1)$$

где учтено, что боковые стороны не дают вклада в циркуляцию, поскольку на них вектора \vec{H} и $d\vec{l}$ взаимно перпендикулярны. В результате получаем

$$H = i/2$$

и в соответствии с (4.14)

$$B = \mu_0 \mu i / 2.$$

Видно, что плоскость создает в пространстве однородное магнитное поле.

Однородность поля можно увидеть, рассматривая контур Γ , целиком лежащий выше (ниже) плоскости. Тогда из (4.12) получаем

$$\int_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \vec{H}_1 \vec{a} + (\vec{H}_2)(-\vec{a}) = (H_1 - H_2)a = I = 0 \quad (2)$$

где H_1 – напряженность магнитного поля на верхнем, а H_2 – на нижнем основаниях прямоугольника. В правой части (2) стоит нуль, поскольку ток через контур теперь не протекает. Итак, из (2) получаем однородность рассматриваемого поля

$$H_1 = H_2 \quad (3)$$

6. *Соленоидом* называется цилиндрическая трубка (бесконечная) с током, по поверхности которой перпендикулярно к ее образующим течет постоянный ток с линейной плотностью i . Чему равна напряженность (индукция) магнитного поля внутри соленоида?

Ответ: $H = i$, $B = \mu_0 \mu i$.

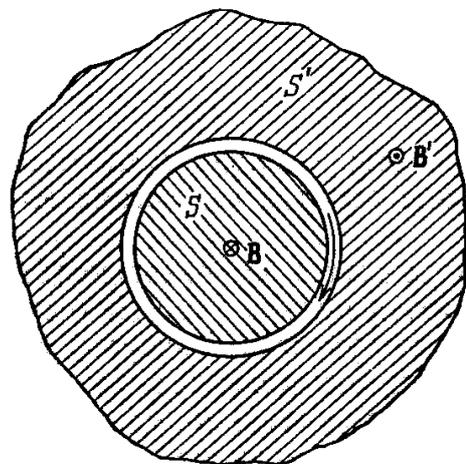
Решение. Расположим ось соленоида горизонтально и разрежем его вертикальной плоскостью, проходящей через ось. Пусть рис. предыдущей задачи теперь представляет верхний разрез поверхности цилиндра.

Рассуждения, аналогичные рассуждениям предыдущей задачи, приводят нас к тому, что магнитное поле снаружи соленоида направлено влево, а внутри – вправо.

Располагая контур вне и внутри соленоида, получаем (см. (3) предыдущей задачи), что магнитное поле в этих областях однородно. Соотношение между магнитной индукцией внутри и вне соленоида получим из (4.16), беря в качестве замкнутой поверхности плоскость (плоскость является сферой бесконечного диаметра),

перпендикулярную оси соленоида. Получаем (см. рис.)

$$BS = B'S'$$



Поскольку площадь S' бесконечна, данное соотношение может быть выполнено только при

$$B' = 0 \quad (1)$$

Итак, магнитное поле снаружи соленоида отсутствует. Чтобы получить напряженность магнитного поля внутри соленоида возьмем контур Γ в виде прямоугольника как на рис. к предыдущей задаче. Тогда

$$\int_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = (-\vec{H})(-\vec{a}) = Ha = I = ia$$

поскольку напряженность магнитного поля на верхней стороне контура Γ равна нулю (1). Итак, $H = i$, а в соответствии с (4.14) $B = \mu_0 \mu i$.

Реализовать соленоид можно, взяв цилиндрический каркас с навитым на него проводом. Тогда, если плотность витков вдоль образующей равна n , а ток в одном витке равен I , то $i = nI$, соответственно $H = nI$, а $B = \mu_0 \mu nI$.

Замечание. Если вместо цилиндра в условии задачи взять тор (согнуть цилиндр конечной длины в кольцо и соединить торцы цилиндра), то такая система называется *тороидом* (см. рис.). Внутри тороида $H = iR/r$ ($H = nIR/r$), $B = \mu_0 \mu iR/r$ ($B = \mu_0 \mu nIR/r$), вне $H = 0$, $B = 0$.

