Экспериментальная школа №1189
им. И.В. Курчатова

Тихонов В. Н.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРИЛОЖЕНИИ К КЕПЛЕРОВОЙ ЗАДАЧЕ.

Москва 2009

Оглавление.

ВВЕДЕНИЕ.

В школьном курсе физики изучается движение материальной точки в поле силы тяжести как вблизи поверхности Земли, так и вдали. Вблизи поверхности Земли движение материальной точки рассмотрено достаточно подробно. А вот движение вдали от поверхности Земли, когда силы имеют Кулоновский характер, все описание движения практически сведено к формулировке законов Кеплера. На наш взгляд, учащиеся 10 класса вполне подготовлены к более подробному рассмотрению задачи движения двух материальных точек под действием сил, имеющих кулоновский характер. Ничего сложнее теоремы Виета и элементарных знаний о производной функции не требуется. В высших учебных заведениях обычно подразумевается, что студенты еще в школе ознакомлены с эллипсом, гиперболой и параболой, хотя если учащиеся и знакомы с их уравнениями, но только в каноническом виде, что недостаточно для механики. Понятие радиуса кривизны курс математического анализа если и вводит, то не очень наглядно и поздно, когда механика уже пройдена. Это только несколько примеров тех пробелов, которые призваны ликвидировать настоящие заметки. Они, на наш взгляд, кроме познавательной информации содержат много различных алгебраических, геометрических и механических задач, выполняя цели и учебника и задачника.

1. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

1.1. Эллипс Каноническое уравнение эллипса.

Эллипсом называется геометрическое место точек на плоскости, для которых сумма расстояний от них до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная и она больше расстояния между фокусами. (Обычно расстояние между фокусами обозначается как 2*c*). Исходя из этого определения эллипса, его можно легко нарисовать следующим образом. Если на место фокусов вбить два гвоздя и на них набросить петлю из нитки, длина которой больше удвоенного расстояния между фокусами, а затем концом карандаша натянуть нить, то, перемещая карандаш по листу бумаги, мы нарисуем эллипс. Типичный рисунок эллипса с фокусами F_1 и F_2 расположенными на оси x симметрично оси y приведен ниже.

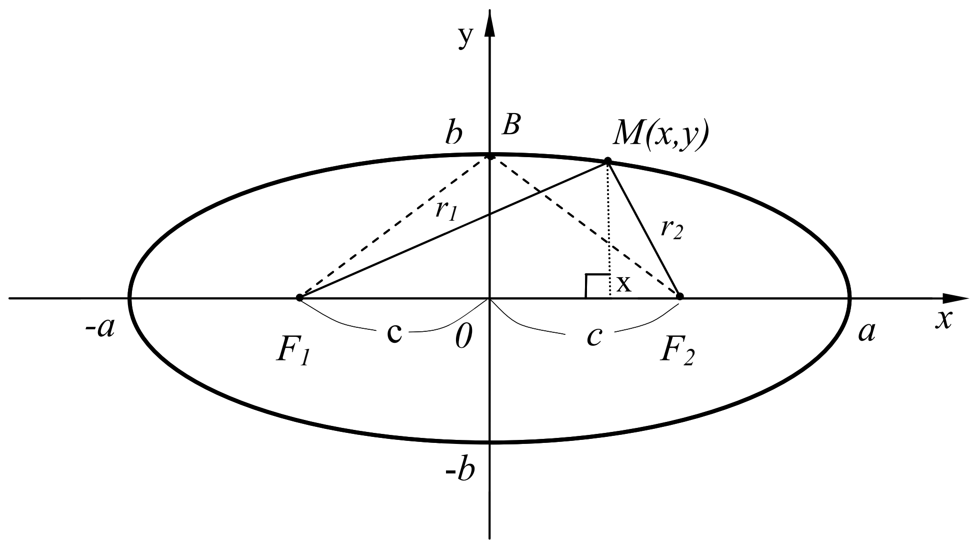


Рис. 1.

Пусть M – произвольная точка эллипса с фокусами F_1 и F_2. Отрезки $F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$ называются **фокальными радиусами** точки M. Сумму фокальных радиусов принято обозначать как **2*a***. Тогда

$$F_1M + F_2M = r_1 + r_2 = 2a. \qquad (1)$$

Длины отрезков $F_1 0 = F_2 0 =$ с. Обозначим координаты пересечения эллипса с осью Y , b и $-b$ соответственно. Как видно из рисунка величина b, вычисляется как катет треугольника OBF_2 по формуле

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} . \tag{2}$$

Заметим, что

$$r_1 + r_2 = 2a,\ a>c \text{ и } a>b>0 \tag{3}$$

Выведем уравнение, которому удовлетворяют координаты точек эллипса. Для этого выпишем значения фокальных радиусов r_1 и r_2:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\ ,\ r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ , \tag{4}$$

и подставив их значения в (1) получим:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{5}$$

Это и есть уравнение эллипса, так как координаты точки M удовлетворяют этому уравнению, а оно отражает выше сформулированное определение эллипса.

Выведем более простое уравнение эллипса. Для этого перепишем уравнение (5) в виде:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} . \tag{6}$$

Так как правые и левые части уравнения (6) положительны, то, возводя их в квадрат и приводя подобные члены, получим уравнение:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx . \tag{7}$$

Повторяя предыдущую процедуру, получим уравнение:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2 y^2 = a^2(a^2 - c^2) . \tag{8}$$

Из равенства (2) имеем:

$$b^2 = a^2 - c^2. \tag{9}$$

Тогда уравнению (8) можно придать вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,. \qquad (10)$$

Уравнение (10) называется **каноническим** уравнением эллипса. Из него следует что

$$|x| \le a, \quad |y| \le b. \qquad (11)$$

Проведенные выкладки доказывают, что координаты точек, принадлежащих эллипсу, удовлетворяют уравнению (10). Докажем теперь обратное утверждение: все точки координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению (10) принадлежат эллипсу.

Пусть x и y – какие-нибудь два числа удовлетворяющие уравнению (10). Производя выкладки в обратном порядке, мы получим уравнение (8). Это уравнение равносильно системе уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=+(a^2-cx) \\ a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=-(a^2-cx) \end{array}\right. . \qquad (12)$$

В силу условия (3) $|x|\le a$ и $c<a$, то $a^2>cx$, а так как левая часть уравнений (12) величина положительная, следовательно, второе уравнение этой системы решений не имеет. Добавляя необходимые слагаемые к первому уравнению системы (12) мы получим:

$$(x+c)^2+y^2=(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,)^2. \qquad (13)$$

Решая это уравнение как квадратное относительно левой части, получим: два решения

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,). \qquad (14)$$

Чтобы выбрать какое из этих решений положительно (с плюсом или минусом), исследуем величину $(x-c)^2+y^2=x^2-2xc+c^2+y^2$. Из (3) и (11) следует, что $x^2\le a^2$, $|cx|<a^2$ и $y^2\le b^2=a^2-c^2$. Тогда $x^2-2xc+c^2+y^2<a^2+2a^2+c^2+a^2-c^2<4a^2$. Следовательно, нужно оставить решение со знаком плюс. Тогда $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$. Что и требовалось доказать.

Если уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ решить относительно *y*, то получим две функции

$y=\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$ и $y=-\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$. Графики этих функций симметричны относительно оси x (см. рис. 2), а сами функций симметричны относительно оси *y*. Отметим, что при $a=b$ получается уравнение окружности.

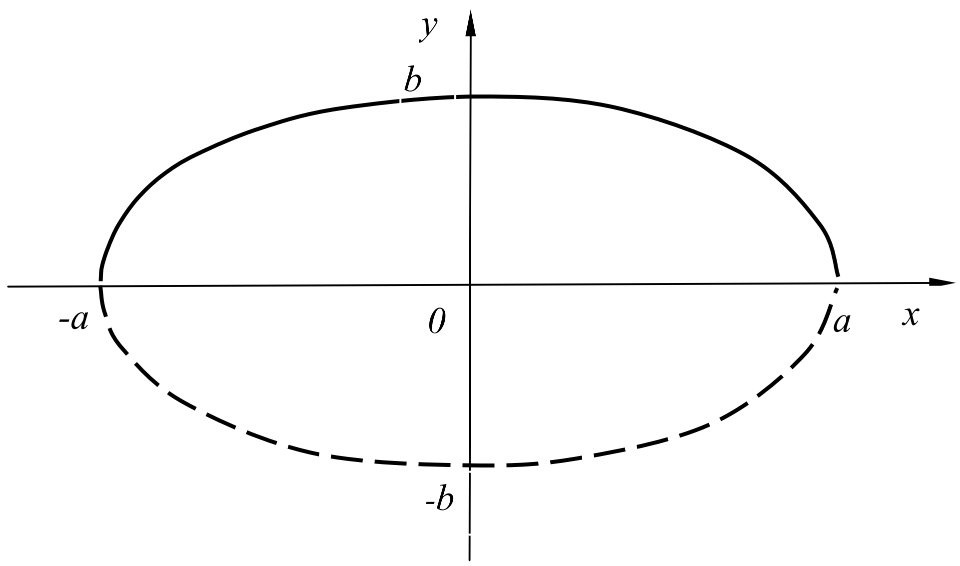


Рис. 2.

1.2. Рациональные выражения фокальных радиусов эллипса.

Эксцентриситет эллипса.

Выражения для фокальных радиусов $r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ мы получили ранее. Они не удобны тем, что содержат радикалы. В процессе вывода канонического уравнения эллипса мы получали формулу (7): $a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$. Отсюда легко видеть что $r_2=a-\frac{c}{a}x$. Аналогично, повторив процедуру выделения в (6) другого радикала, получим выражение для r_1. Окончательно, **рациональные выражения для фокальных радиусов** выглядят так:

$$\begin{aligned} r_1 &= a + \frac{c}{a}x \\ r_2 &= a - \frac{c}{a}x \end{aligned}. \qquad (15)$$

Введем понятие эксцентриситета.

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами эллипса к длине его большой полуоси.

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \qquad (16)$$

Тогда (15) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} r_1 &= a + \varepsilon x \\ r_2 &= a - \varepsilon x \end{aligned}. \qquad (17)$$

Эти выражения будут существенно использоваться в дальнейшем.

1.3. **Параметрические уравнения эллипса.**

Если величины x и y связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}, \qquad (18)$$

то равенство $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ выполняется автоматически. Следовательно, точки плоскости, определяемые (18) принадлежат эллипсу. Покажем, что и точки эллипса параметризуются соотношением (18). Так как $|x| \le a$, то величину x, удовлетворяющую уравнению $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ можно представить в виде $x = a\cos t$. Тогда, подставляя ее в это уравнение, получим: $y^2 / b^2 + \cos^2 t = 1$. Откуда $y^2 = b^2(1-\cos^2 t) = b^2\sin^2 t$. Решая это уравнение относительно у, получим $y = \pm b\sin t$. Если взять решение со знаком плюс, то получим соотношение (18), а если со знаком минус, то, воспользовавшись равенствами $-\sin t = \sin(-t)$ и $\cos t = \cos(-t)$, получим $x = a\cos(-t)$, $y = b\sin(-t)$. Переобозначив $t \to -t$ получим опять (18).

Используя параметрическую запись уравнения эллипса можно по точкам построить его график.

1.4. Построение эллипса по точкам.

Опишем вокруг центра координат две окружности радиусом *a* и *b* (*a*>*b*) (см. рис. 3).

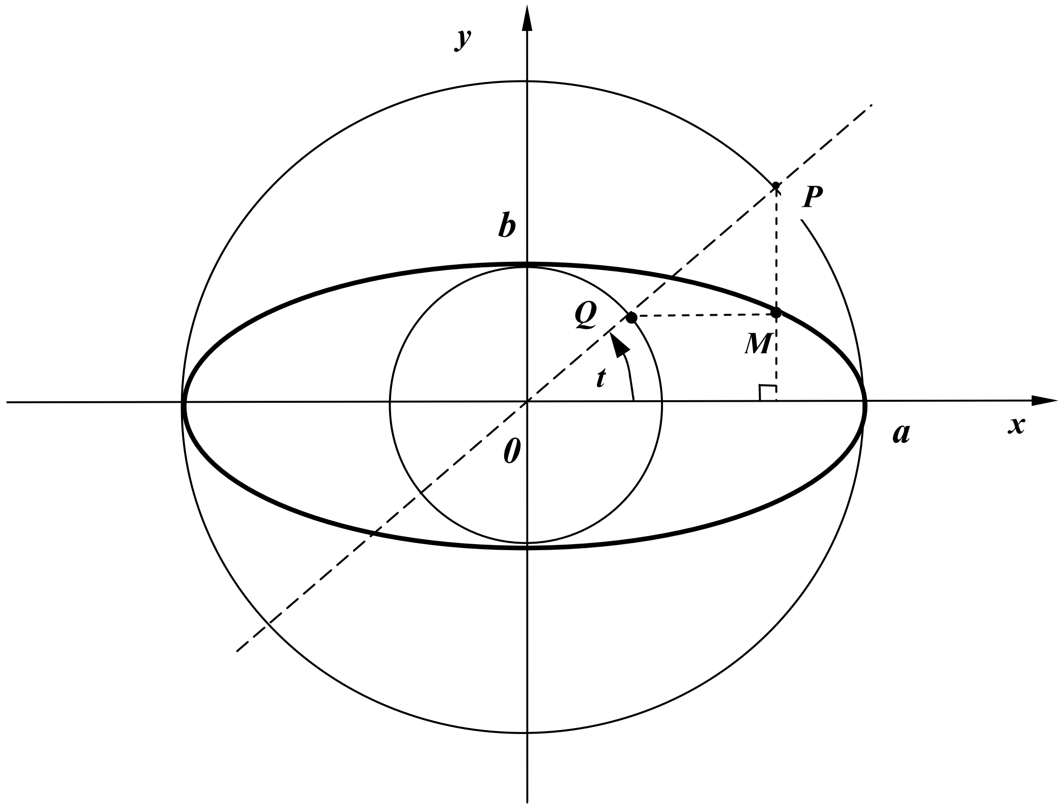


Рис. 3.

Проведем через начало координат прямую под углом *t* к оси *x*. Она пересечет окружности в точках *Q* и *P*. Координаты точки *Q* будут *b*cos(*t*) , *b*sin(*t*) а точки *P* *a*cos(*t*) , *a*sin(*t*). Проведем через точку Q прямую, параллельную оси *x*, а через точку *P* прямую, параллельную оси у. Они пересекутся в точке М с координатами *a*cos(*t*), *b*sin(*t*). Следовательно, точка *M* принадлежит эллипсу.

Существует еще один способ построения эллипса. Для этого воспользуемся своеобразным «циркулем». Возьмем отрезок прямой длиной, равной большой полуоси эллипса *a.* Обозначим один конец отрезка буквой *A*, а другой *C*. Выберем на отрезке точку *B*, такую, что $AB = b$ - длине малой полуоси эллипса. Расположим отрезок *AC* на координатной плоскости следующим образом (см. рис. 4):

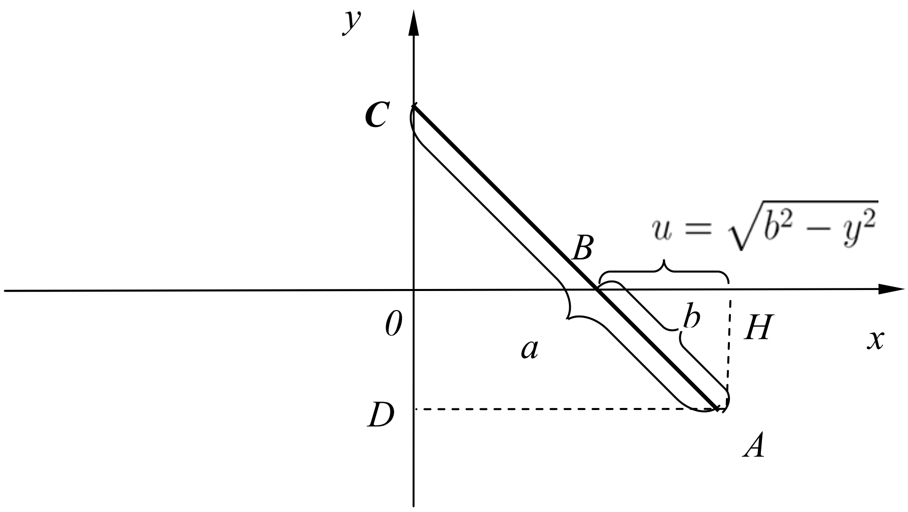


Рис. 4.

Пусть точка *C* перемещается по координатной оси *0y*, а точка В по оси *0x*. Тогда точка *A* будет описывать эллипс. Докажем это. Из точки *A* опустим перпендикуляры *AH* и *AD* на оси *0x* и *0y* соответственно. Треугольник *ACD* подобен треугольнику *ABH*. Тогда $\frac{BH}{AB} = \frac{AD}{AC}$ или $\frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b} = \frac{x}{a}$, возводя в квадрат обе части равенства, получим $\frac{b^2 - y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2}$, следовательно $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

1.4. Эллипс как проекция окружности на плоскость. Эллипс как сечение круглого цилиндра.

Если использовать параметрическую запись уравнения эллипса, то легко доказывается, что проекция окружности на плоскость – это эллипс.

Рассмотрим две плоскости, угол между которыми равен φ (см. рис.5) такие, что одной из них принадлежит окружность (плоскость α), другая проходит через центр эллипса и на нее проецируется окружность (плоскость β). Проекцией точки P, которая принадлежит окружности на, плоскость β является точка M. Для проекции $0Q$ прямой $0P$ на ось x получим

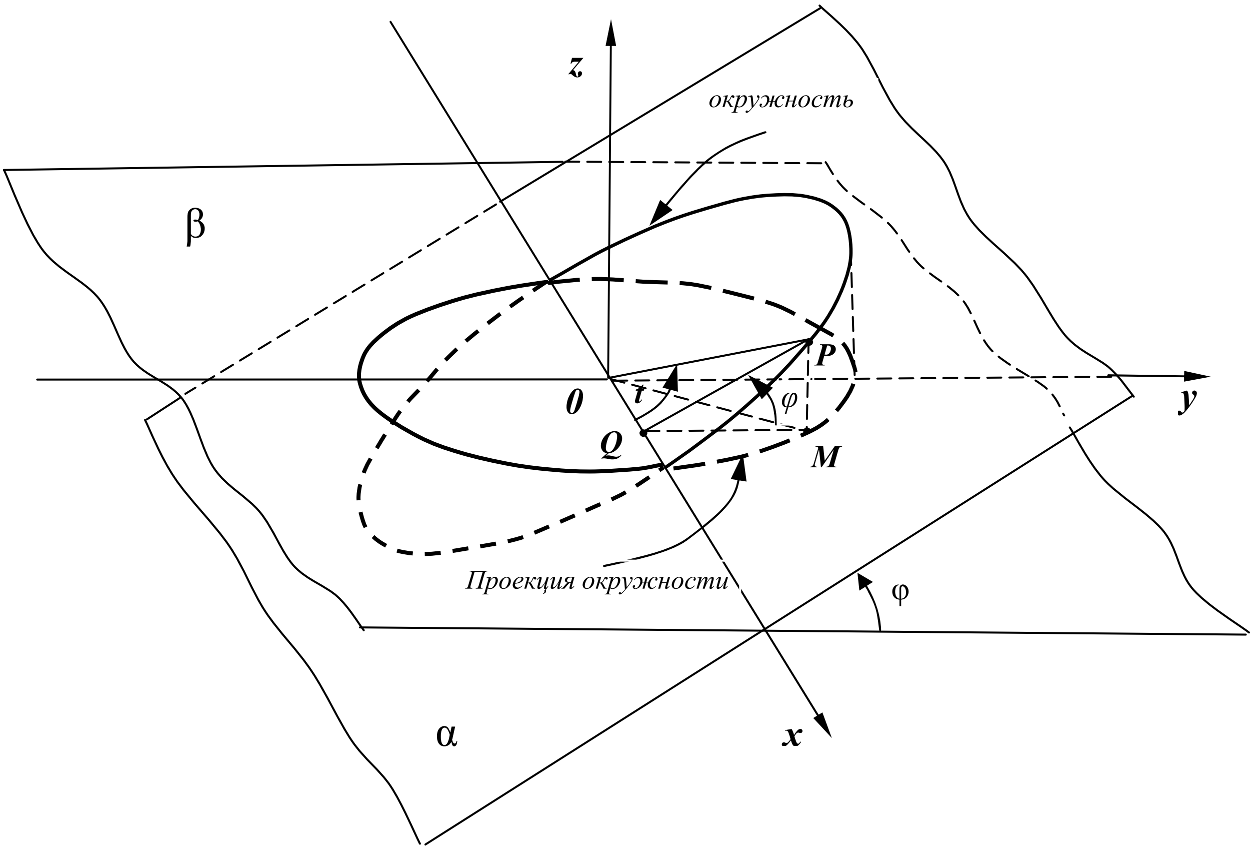


Рис. 5.

$0Q = 0P\cos t$, а для QM, которая равна координате y точки M $QM = 0P\sin t\cos\varphi$. Обозначим $0P=a$ и $0P\cos\varphi=b$. Тогда координаты точки М запишутся в виде ($a\cos t$, $b\sin t$), а это и есть параметрическая запись координат эллипса.

Из курса школьной геометрии известно, что площадь проекции плоской фигуры на плоскость равна площади фигуры умноженной на косинус угла между плоскостями. Отсюда немедленно следует, что площадь эллипса равна произведению числа π на полуоси эллипса:

$$S_{эл} = \pi ab \tag{19}$$

Для доказательства того, что сечение круглого цилиндра плоскостью представляет собой эллипс, рассмотрим круглый цилиндр и построим две плоскости, одна (плоскость β) перпендикулярна оси цилиндра, а другая (плоскость α) составляет с ней угол φ и пусть линия пересечения плоскостей проходит через ось цилиндра. Сечение цилиндра плоскостью β образует окружность по определению круглого цилиндра. В плоскости α введем систему координат с центром расположенном на оси цилиндра и осью x,

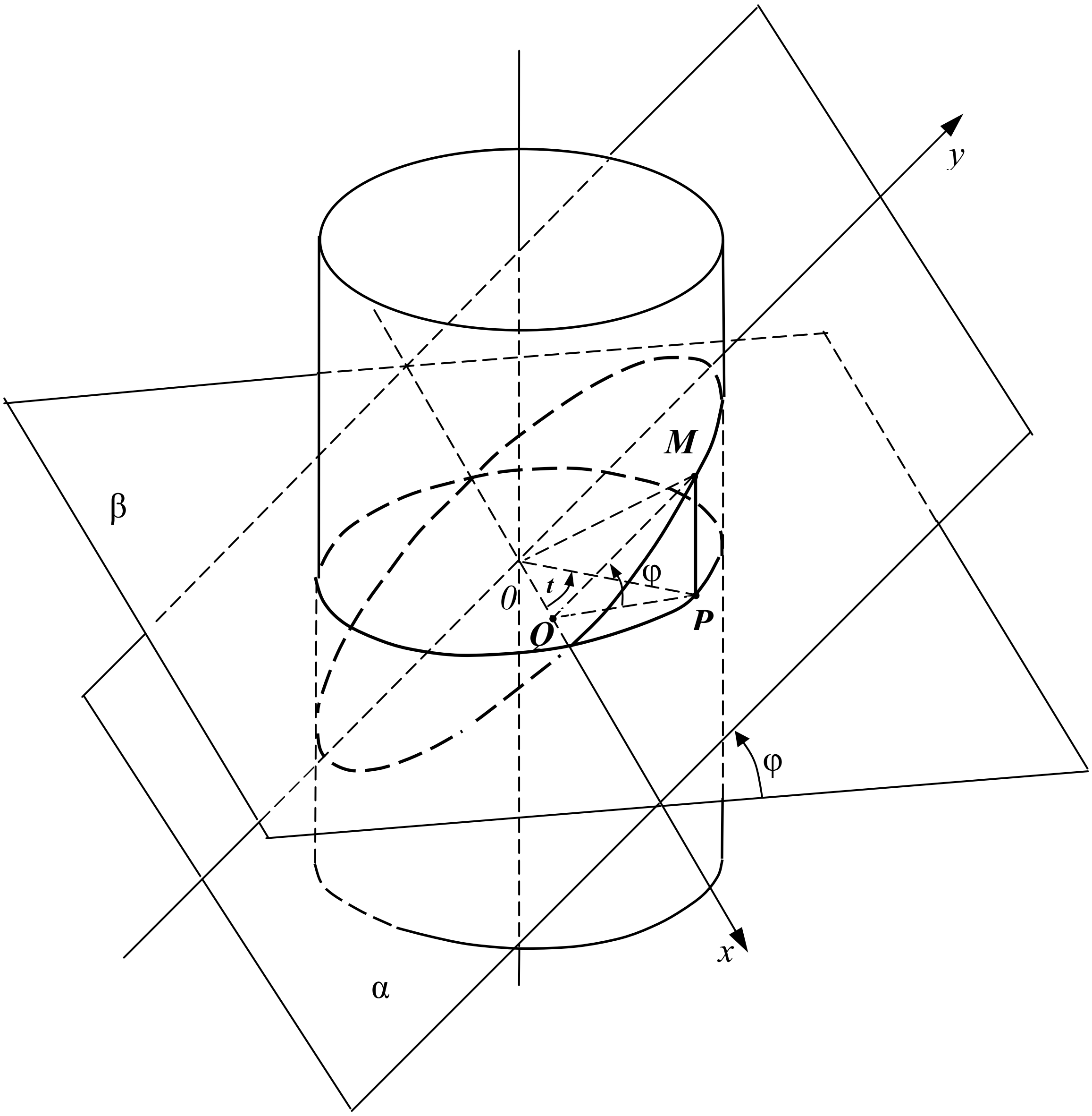


Рис.6.

совпадающей с прямой образованной пересечением плоскостей. Возьмем на окружности точку P. Составляющую с осью x угол t. Тогда для $PQ \perp 0x$

$PQ = OP\sin t$, а $0Q = 0P\cos t$. Проведем PM параллельно оси цилиндра до пересечения с плоскостью β. Тогда $QM = \dfrac{PQ}{\cos\varphi} = \dfrac{OP\sin t}{\cos\varphi}$. Если обозначить $b = \dfrac{OP}{\cos\varphi}$ и *a=0P, то 0Q=x=a*cos*t, а QM=y=b*sin*t.* Что соответствует параметрическому уравнению эллипса.

1.5. Гипербола.

Гиперболой называется геометрическое место точек на плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная. (Очевидно, что эта разность меньше чем расстояние между фокусами.)

Типичная гипербола с фокусами F_1 и F_2 расположенными на оси X симметрично оси Y приведена на рисунке 7.

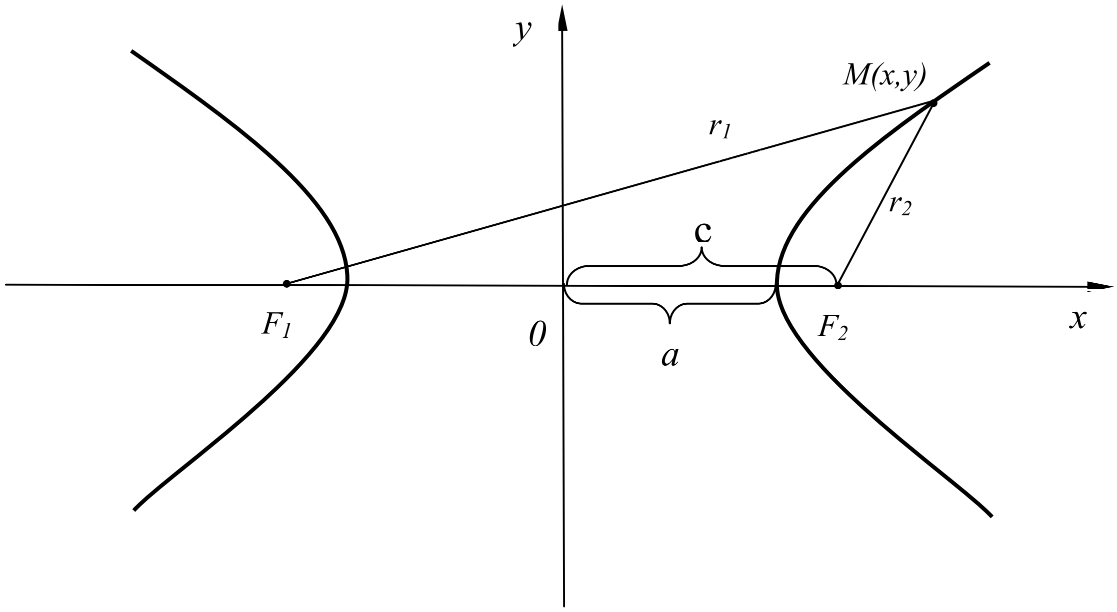


Рис. 7.

Расстояние от фокусов гиперболы до точки *M,* принадлежащей гиперболе (фокальные радиусы), как обычно, обозначим r_1 и r_2 Длины отрезков $F_10 = F_20=c$. Тогда уравнение, которому удовлетворяют точки гиперболы, запишется в виде:

$$|r_1 - r_2| = 2a \qquad (20)$$

или
$$r_1 - r_2 = \pm 2a\ . \qquad (21)$$

Знак (+) берется для правой ветви гиперболы, а (-) – для левой.

Используя известные выражения (4) для фокальных радиусов r_1 и r_2, получим

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a. \qquad (22)$$

Оставим один из радикалов (например $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$) в левой части уравнения, а другой перенесем в левую часть. Возведем в квадрат получившееся уравнение. После приведения подобных членов получим:

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = cx - a^2\ .$$

(Вспоминая, что $r_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$, получим полезную формулу для r_2: $r_2 = \pm(\varepsilon x - a)$). Возведем в квадрат полученное уравнение. В результате получим уравнение:

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2). \qquad (23)$$

Введем величину $b = \sqrt{c^2-a^2}$ тогда уравнение (16) примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ . \qquad (24)$$

Это уравнение называется **каноническим** уравнением гиперболы.

Если при выводе уравнения (24) в левой части равенства оставить другой радикал, то мы получим формулу для r_1: $r_1 = \pm(\varepsilon x + a)$. Приведем окончательные выражения для фокальных радиусов гиперболы:

$$\begin{aligned} r_1 &= \pm(\varepsilon x + a) \\ r_2 &= \pm(\varepsilon x - a)\ . \end{aligned} \qquad (25)$$

Знак (+) берется для правой ветви гиперболы, а (-) – для левой.

Так как F_1A-$F_2A=2a$, то (F_1O+OA) - $(OF_2 - OA)=2a$. По построению $OF_1=OF_2$, следовательно, $OA=a$. Рассуждая далее аналогично тому, как это делалось в случае эллипса, для эллипса можно получить из уравнения (21) уравнение (22). Следовательно, эти уравнения равносильны.

Уравнение (24) можно решить относительно *y*. Тогда получим две функции:

$$y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \text{ и } y_2 = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\ . \tag{26}$$

Графики этих двух функций совпадают с множеством точек, на плоскости, координаты которых являются решениями канонического уравнения гиперболы (24). Исследуем поведение графиков этих функций. Как следует из вышесказанного, область изменения переменной x состоит из двух интервалов $(-\infty, -a]$ и $[a, +\infty)$. Исследуем теперь графики функций на асимптоты. (Напомним, что асимптоты – это прямые вида $kx + m$ к которым стремятся функции при $x \to \infty$ или $x \to -\infty$) Из курса математического анализа известно, что для того, получения коэффициентов наклона асимптот нужно рассмотреть предел отношения $\frac{y_1}{x}$ и $\frac{y_2}{x}$ при $x \to \pm\infty$. Выписав явное значение y_1 и y_2, получим $k_1 = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}}{x}\right) = \pm\frac{b}{a}$ и $k_2 = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}}{x}\right) = \mp\frac{b}{a}$. Коэффициенты m вычисляются по формулам: $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(y - kx)$, Следовательно, $m_1 = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - k_1 x\right) = 0$ и $m_2 = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - k_2 x\right) = 0$. Отсюда следует, что графики функций y_1 и y_2 имеют асимптоты $\frac{b}{a}x$ и $-\frac{b}{a}x$. (см. рис.8)

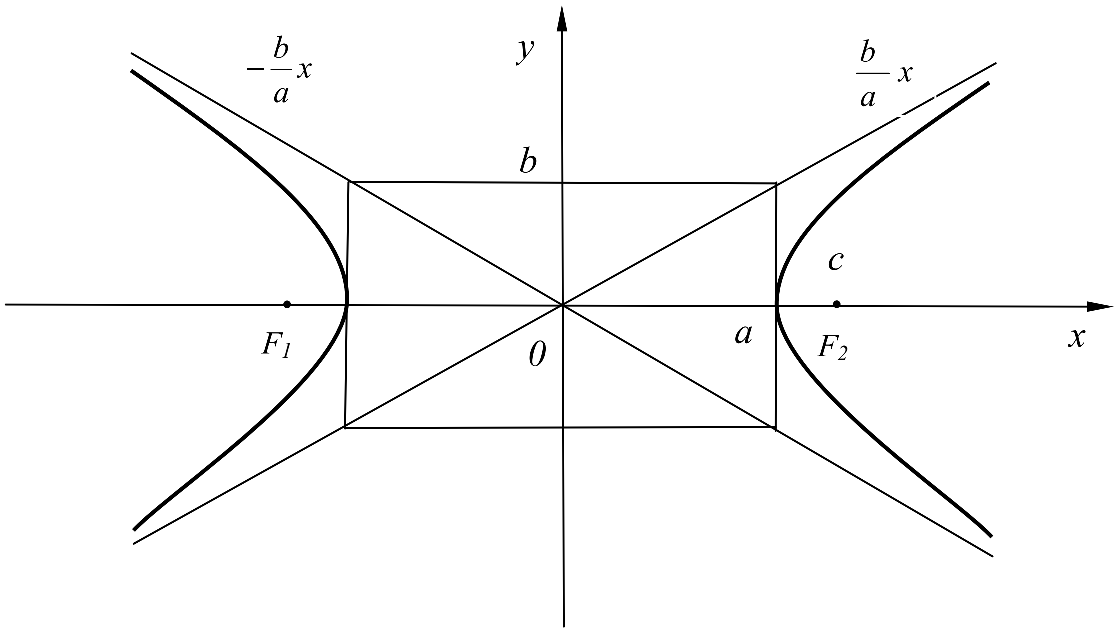


Рис. 8

1.6. Директрисы эллипса и гиперболы.

Пусть эллипс задается каноническим уравнением в декартовых координатах $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Рассмотрим случай, когда эллипс не является окружностью, т. е $a \neq b$ и, следовательно, $\varepsilon \neq 0$.

Определение. Две прямые, перпендикулярные к большой оси эллипса и расположенные симметрично относительно центра эллипса на расстоянии a/ε от него, называются **директрисами** эллипса (рис.9).

Аналогично определяется директриса гиперболы:

Две прямые, перпендикулярные к оси гиперболы, которая ее пересекает, и расположенные симметрично относительно центра гиперболы на расстоянии a/ε от него, называются **директрисами** гиперболы (см. рис.10) .

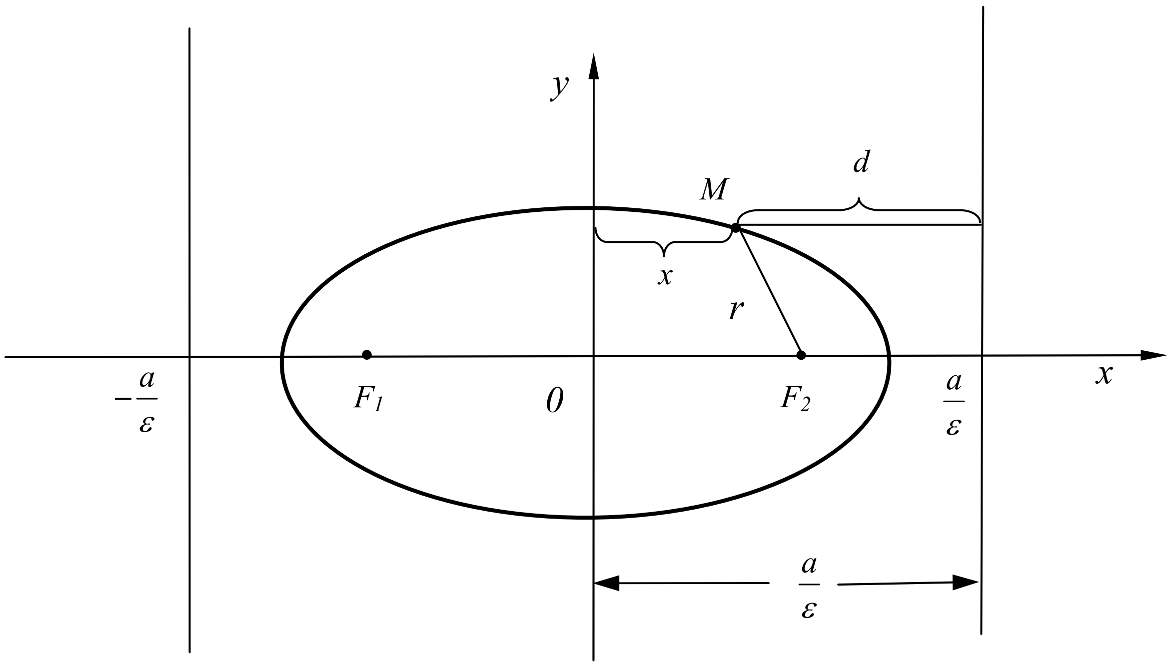


Рис. 9.

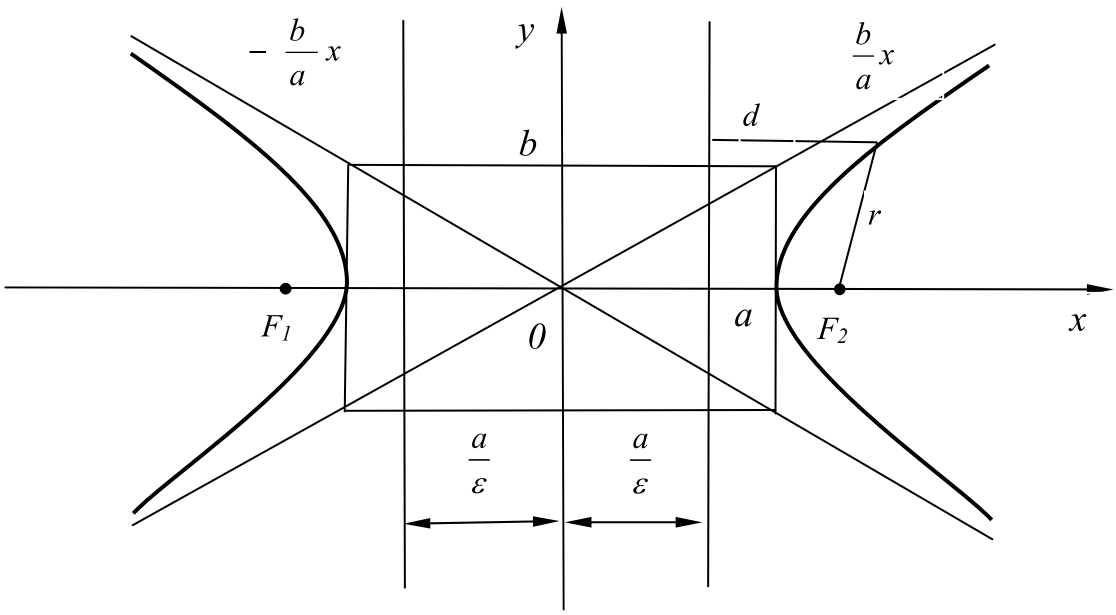


Рис. 10

Существует замечательная **теорема**, которая гласит, что если r – расстояние от точки, принадлежащей эллипсу (гиперболе) до какого-нибудь фокуса, а d – расстояние от этой же точки до соответствующей директрисы, то ${}^{r}\!/_{d} = \varepsilon$. Докажем ее.

Расстояние d от произвольной точки эллипса до правой директрисы эллипса, как это видно из рисунка, выражается следующим образом: $d = a/\varepsilon - x$, а расстояние от фокуса F_2 до этой же точки эллипса согласно формуле (17) $r_2 = a - \varepsilon x$. Тогда получим $r_2/d = \varepsilon$. Аналогично доказывается это утверждение и для левой директрисы эллипса.

Для гиперболы расстояние d от ее произвольной точки до правой директрисы, как это видно из рисунка, выражается аналогичным образом: $d = x - a/\varepsilon$, а расстояние от фокуса F_2 до этой же точки гиперболы, согласно формуле (25) $r_2 = \varepsilon x - a$. Тогда получим $r_2/d = \varepsilon$. Аналогично доказывается это утверждение и для левой директрисы гиперболы.

Свойства эллипса и гиперболы, выраженные в доказанной теореме можно положить в основу еще одного **определения эллипса и гиперболы**. Именно, геометрическое место точек, для которых расстояние r до некоторой фиксированной точки (фокуса) и расстояние d до некоторой фиксированной прямой (директрисы) находятся в постоянном отношении, $r/d = \varepsilon$ называется эллипсом при $\varepsilon<1$, а при $\varepsilon>1$ называется гиперболой.

1.7. Парабола.

Параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой.

Пусть с координатами x и y на плоскости имеется такая кривая (см. рис.11).

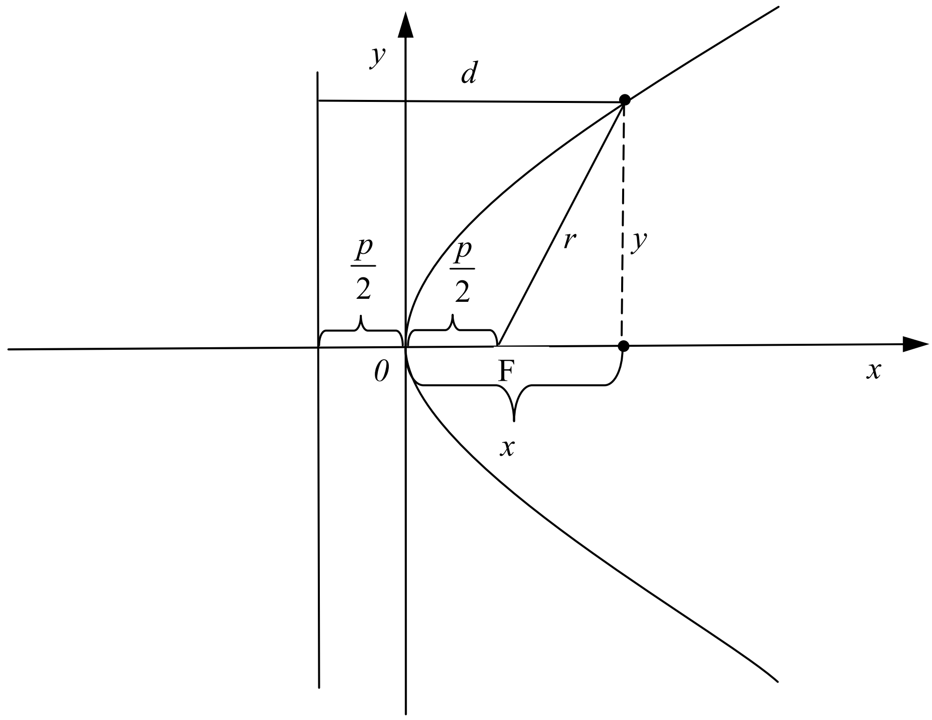


Рис. .11

Введем декартову систему координат таким образом, что бы ось x, была перпендикулярна директрисе и проходила через фокус параболы. Тогда ось y будет параллельна директрисе. Расположим начало координат между фокусом и директрисой. Расстояние от директрисы до фокуса обозначим как p. Расстояние от точки параболы с координатами x и y до директрисы обозначим как d, а расстояние от точки параболы до фокуса как r. Тогда имеем: $r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$, $d = x + \frac{p}{2}$. Вследствие равенства $r=d$ мы получим соотношение: $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$. После возведения в квадрат обеих частей этого равенства и приведения подобных членов мы получим:

$$y^2 = 2px \,. \tag{26}$$

Это уравнение называется **каноническим уравнением парабол**ы.

1.8. Полярное уравнение эллипса, гиперболы и параболы.

Используем определение эллипса, гиперболы и параболы, в которых использованы понятия фокуса и директрисы. Расположим в пространстве полярную ось так, чтобы она начиналась из фокуса, была перпендикулярна директрисе, и ее направление было в сторону от директрисы (см. рис .12).

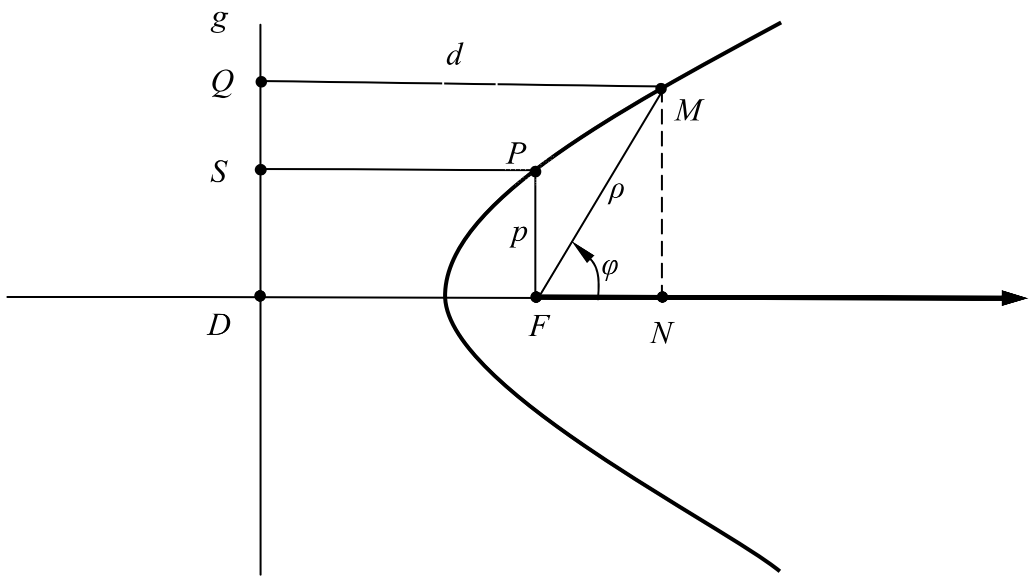


Рис. 12.

Будем исходить из постоянства отношения

$$\frac{d}{\rho} = \frac{1}{\varepsilon}, \ \frac{d}{\rho} = \frac{SP}{PF} = \frac{DF}{p} = \frac{1}{\varepsilon}. \tag{27}$$

Далее, $d = QM = DN = DF + FN = DF + \rho\cos\varphi$, но из (27) следует, что, $\dfrac{DF}{p} = \dfrac{1}{\varepsilon}$

следовательно, $DF = \dfrac{p}{\varepsilon}$, а $d = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$, тогда $\dfrac{\rho}{\varepsilon} = \dfrac{p}{\varepsilon} + \rho\cos\varphi$. Откуда

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}. \tag{28}$$

Это и есть **полярное уравнение эллипса, параболы** и одной ветви **гиперболы.**

1.9. Диаметры линий второго порядка.

Интересным свойством обладают хорды линий второго порядка. Для эллипсов его выражает следующая теорема:

Середины хорд линей второго порядка лежат на одной прямой, и эта прямая проходит через центр симметрии эллипса и гиперболы, а в параболе эта прямая параллельна оси симметрии параболы.

1. Пусть данная линия эллипс:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (29).$$

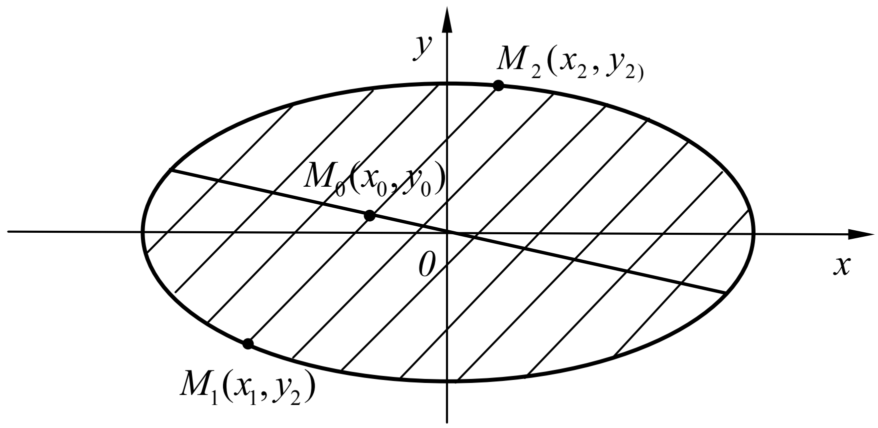


Рис. 13.

Уравнение каждой такой хорды записывается в виде:

$$y = kx + l\,. \qquad (30)$$

Фиксируя коэффициент k, тем самым, задавая угол наклона хорд. Найдем концы хорд. Для этого подставим (30) в (29) и получим $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(kx+l)^2}{b^2}=1$ или

$(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2klx + a^2(l^2 - b^2) = 0$.

Корни этого уравнения x_1, x_2 есть абсциссы концов хорды $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. Пусть $M_0(x_0,y_0)$ – середина этой же хорды. Тогда $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Из теоремы Виета имеем $x_1 + x_2 = -\frac{2a^2kl}{b^2 + a^2k^2}$.

Следовательно,

$$x_0 = -\frac{a^2kl}{b^2 + a^2k^2}\,. \qquad (31)$$

Подставим (31) в (30) и найдем что

$$y_0 = kx + l = -\frac{a^2k^2l}{b^2 + a^2k^2} + l = \frac{b^2l}{b^2 + a^2k^2} \qquad (32)$$

Уравнения (31) и (32) суть параметрические уравнения центров хорд в зависимости от параметра *l*. Избавимся от него следующим образом: разделим (32) на (31) и получим

$$\frac{x_0}{y_0} = -\frac{b^2}{a^2k},$$

или

$$y_0 = -\frac{b^2}{a^2k}x_0 \qquad (33).$$

Это уравнение означает, что центры хорд лежат на прямой, проходящей через начало координат, которое совпадает с центром симметрии эллипса. Положение хорд эллипса иллюстрируют рис. 13.

2. Пусть данная линия есть гипербола.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (34)$$

Как и ранее, подставим (30) в (34) и получим

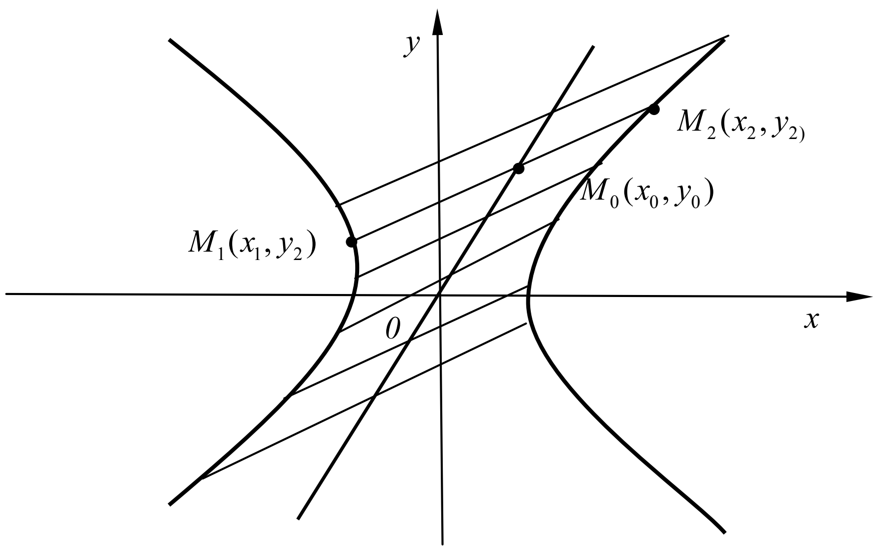


Рис. 14.

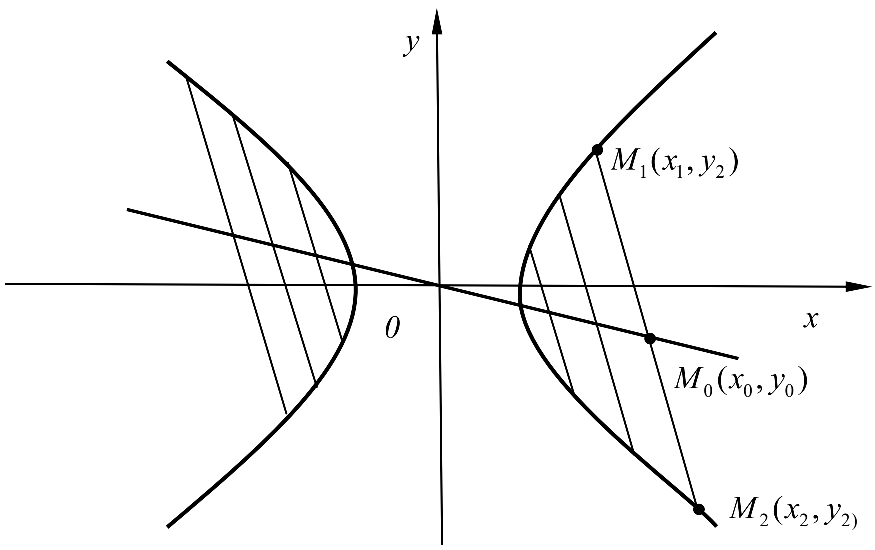


Рис. 15.

$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2klx - a^2(l^2 + b^2) = 0$.

Используя, как и ранее теорему Виета получим

$$x_0 = -\frac{a^2kl}{b^2 - a^2k^2}, \quad y_0 = \frac{b^2 l}{b^2 - a^2k^2}. \tag{35}$$

Тогда

$$y_0 = \frac{b^2}{a^2k} x_0. \tag{36}$$

Положение хорд гиперболы иллюстрируют рис. 14 и рис. 15.

3. Пусть данная линия парабола:

$$y^2 = 2px. \tag{37}$$

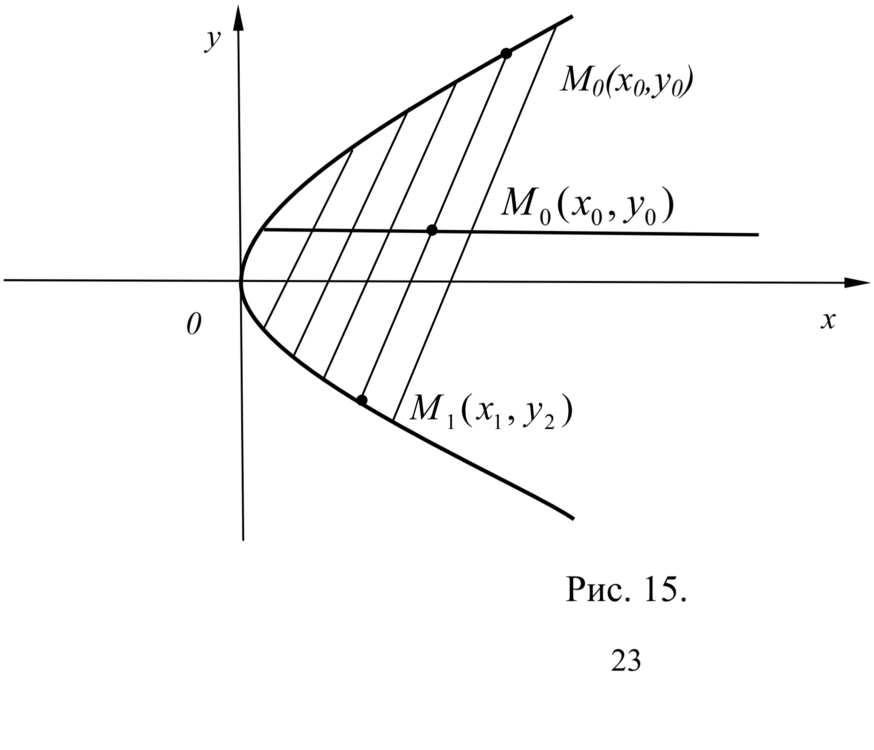


Рис. 15.

Подставим (30) в (37) получим

$$k^2x^2+2(kl-p)x+l^2=0.$$

Используя теорему Виета, и в этом случае полечим

$$x_0=-\frac{p-kl}{k^2}. \quad y_0=\frac{p}{k}. \tag{38}$$

Меняя l как параметр при постоянном k , мы будем получать различные линии параллельные оси абсцисс, тем самым параллельные оси параболы.

Нам осталось рассмотреть только случай когда хорды параллельны оси ординат. В силу симметрии эллипса гиперболы и параболы относительно их осей, очевидно, что середины хорд будут находиться на осях симметрии. Теорема доказана.

1.10. Касательные к линиям второго порядка.

Составим **уравнение касательной к эллипсу в точке (*x_0,y_0*),.принадлежащей эллипсу.** Как известно из школьного курса математики, уравнение прямой, проходящей через точку (x_0,, y_0) имеет вид

$$y=k(x-x_0)+y_0. \tag{39}$$

Далее можно пойти двумя путями:

<u>Первый путь</u>. Подставим это значение y в уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Тогда имеем $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(k(x-x_0)+y_0)^2}{b^2}=1$. Затем возведем в квадрат, приведем к общему знаменателю и, выделив коэффициенты при x и x^2 , получим

$$(b^2+a^2k^2)x^2-2(a^2k^2x_0-a^2ky_0)x+a^2k^2x_0^2+a^2y_0^2-2a^2kx_0y_0-a^2b^2=0$$

- квадратное уравнение относительно x. Условие касания прямой эллипса эквивалентно требованию единственности решения этого уравнения, что в свою очередь требует равенства нулю дискриминанта квадратного уравнения.

$$D/4=(a^2k^2x_0-a^2ky_0)^2-(b^2+a^2k^2)(a^2k^2x_0^2+a^2y_0^2-2a^2kx_0y_0-a^2b^2)=0.$$

После возведения в квадрат, перемножения и приведения подобных членов получим квадратное уравнение относительно k

$$(x_0^2-a^2)k^2-2x_0y_0k-b^2+y_0^2=0.$$

Его решение имеет вид $k=\dfrac{x_0y_0\pm\sqrt{x_0^2b^2+y_0^2a^2-a^2b^2}}{x_0^2-a^2}$. Учитывая, что точка ($x_0$,$y_0$) принадлежит эллипсу и, следовательно, выполняется равенство

$$x_0^2b^2+y_0^2a^2=a^2b^2.$$

(40)

Следовательно, $k=\dfrac{x_0y_0}{x_0^2-a^2}=\dfrac{x_0y_0b^2}{x_0^2b^2-a^2b^2}=-\dfrac{x_0b^2}{y_0a^2}$. Уравнение касательной принимает вид

$y=-\dfrac{x_0b^2}{y_0a^2}(x-x_0)+y_0$ или $yy_0a^2+xx_0b^2+x_0^2b^2+y_0^2a^2=0$. Учитывая равенство (40) окончательно получаем уравнение касательной к эллипсу в точке эллипса (x_0,, y_0).

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1. \qquad (41)$$

<u>Второй путь</u>. Дифференцируя, уравнение эллипса получим:

$$\frac{2x}{a^2}dx+\frac{2y}{b^2}dy=0 \quad \text{Откуда } \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Из курса математического анализа известно, что коэффициент $k=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$ в уравнении прямой (39) для точки (x_0,, y_0). $k=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$.Тогда $y=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)+y_0$ или $a^2y_0y+b^2x_0x=b^2x_0^2+a^2y_0^2$. Учтя равенство (40) получим уравнение (41).

Составим **уравнение касательной к гиперболе в точке (x_0, y_0), принадлежащей гиперболе**. Дифференцируя каноническое уравнение гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, получим $k=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$. Подставляем это значение k в

(39) и, воспользовавшись равенством $x_0^2b^2 - y_0^2a^2 = a^2b^2$, аналогичным равенству (40) для эллипса получим уравнение касательной к гиперболе в точке гиперболы (x_0, y_0):

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1 . \tag{42}$$

Составим **уравнение касательной к параболе в точке (x_0, y_0), принадлежащей параболе.**. Дифференцируя уравнение параболы $y^2 = 2px$, получим $k = \dfrac{p}{y_0}$. Подставляем это значение k в (39) и, воспользовавшись равенством $y_0^2 = 2px_0$, аналогичным равенству (40) для эллипса получим уравнение касательной к параболе в точке параболы (x_0, y_0):

$$yy_0 = p(x + x_0) . \tag{43}$$

1.11. Оптические свойства эллипса, параболы и гиперболы.

Сформулируем пока без доказательства некоторые геометрические свойства линий второго порядка.

1. Прямая, касающаяся эллипса в некоторой его точке M составляет с фокальными радиусами равные углы (см. рис.16).
2. Прямая, касающаяся, параболы в некоторой точке M, составляет равные углы с фокальным радиусом и лучом, исходящим из точки M и идущем параллельно оси параболы не пересекая ее (см. рис 17).
3. Прямая, касающаяся гиперболы в некоторой ее точке M составляет с фокальными радиусами равные углы (см. рис. 18).

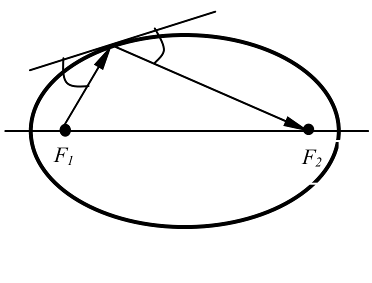


Рис. 16.

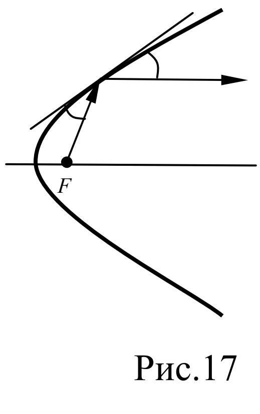


Рис.17

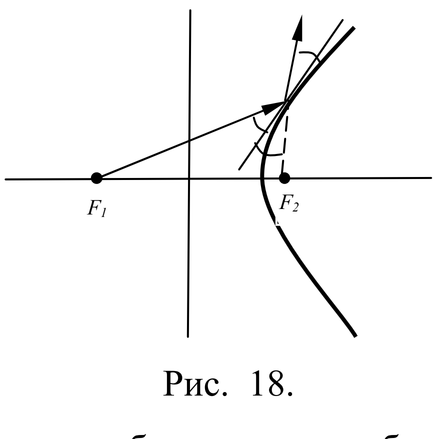


Рис. 18.

Физически это означает, что если вращать эллипс, параболу или гиперболу вокруг оси симметрии, проходящей через фокусы, то мы получим поверхности, именуемые соответственно эллипсоидом, параболоидом и гиперболоидом. Если эти поверхности сделать зеркальными, то получим эллиптическое, параболическое и гиперболические зеркала. Принимая во внимание, что угол падения света на плоское зеркало равен углу отражения, а любую непрерывную кривую поверхность в очень малой области точки M (έ – окрестности) можно представить как плоскость, касающуюся ее в этой точке, то можно доказать, что

1. Если источник света поместить в одном из фокусов эллиптического зеркала, то его лучи, отразившись от поверхности эллипсоида, соберутся в другом фокусе.
2. Если источник света поместить в фокусе параболического зеркала, то его лучи, отразившись от его поверхности, идут параллельно оси зеркала.
3. Если источник света поместить в одном из фокусов эллиптического зеркала, то, отразившись от поверхности гиперболического зеркала, они пойдут так, как если бы они были испущены из другого фокуса.

1.12. Эллипс, парабола и гипербола как конические сечения.

В школьном курсе геометрии доказывается следующее утверждение: сечениями конуса, образованного множеством прямых, проходящих

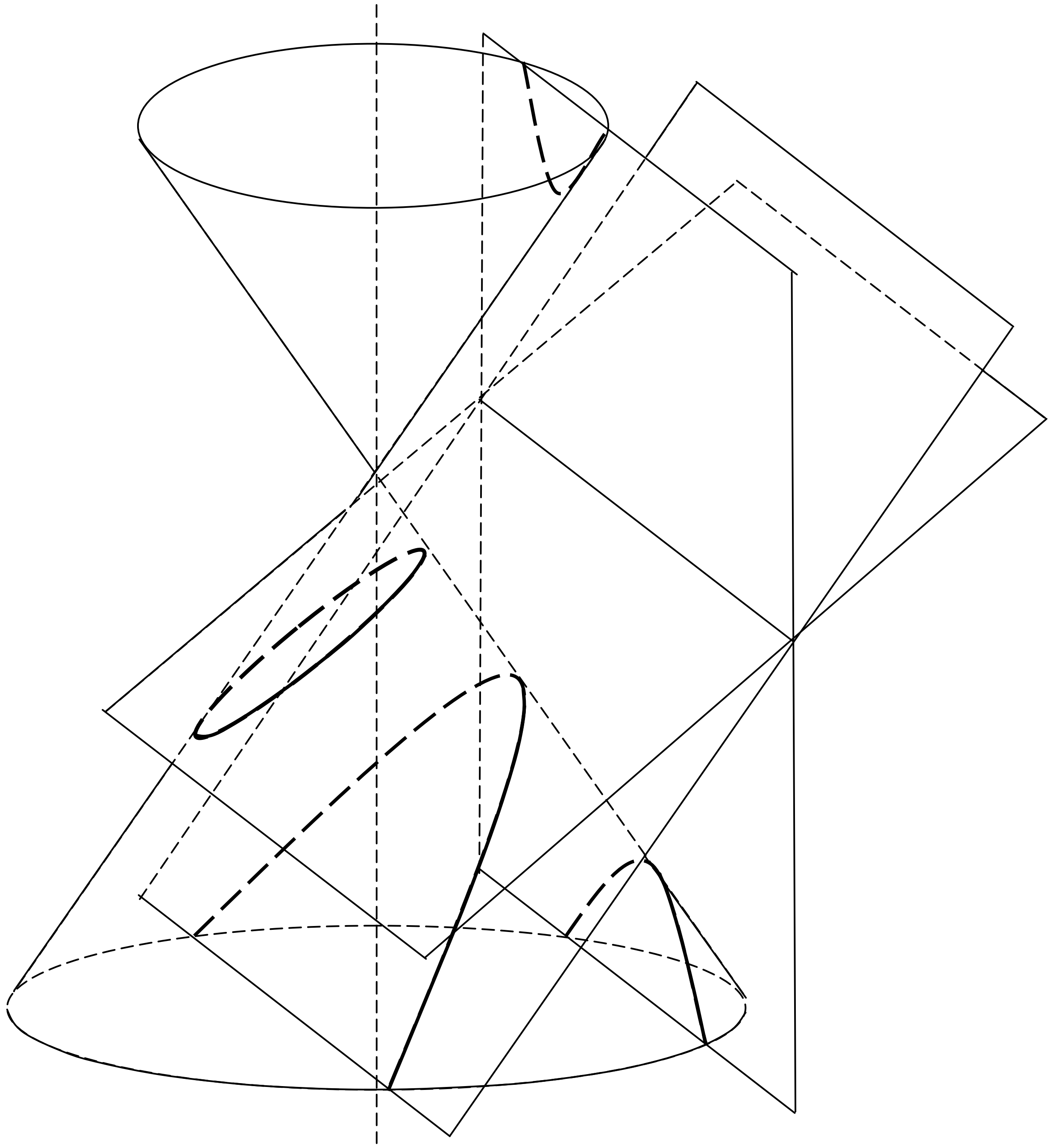


Рис. 19.

через фиксированную точку, и окружность, центр которой совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из этой фиксированной точки на плоскость окружности, могут быть только точкой, эллипсом, параболой или гиперболой (см. рис. 16).

Если вращать плоскость вокруг прямой *PQ,* которая перпендикулярна оси конуса, то мы будем получать в случае однократного пересечения конуса плоскостью точку окружность или эллипс, а в случае, если плоскость параллельна оси конуса – параболу, а в случае двукратного пересечения конуса – гиперболу.

2. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КИНЕМАТИКИ.

2.1. Разложение скорости на радиальную и трансверсальную составляющие.

Движение тел в плоскости иногда удобно описывать не в декартовой системе координат, а в полярной. То есть рассматривать меняющиеся со временем не декартовы координаты тела *x(t)* и *y(t)*, а модуль радиуса вектора *r(t)* (вектора проведенного из начала координат в точку нахождения тела) и угла *φ(t)* между полярной осью (обычно совпадающей с осью *x* декартовой системы координат) и радиусом вектором $\vec{r}$. Тогда декартовы координаты представляются в виде:

$$\begin{aligned} x &= r(t)\cos\varphi(t) \\ y &= r(t)\sin\varphi(t) \end{aligned} \quad (44)$$

Взяв их производные по времени, получим значения проекций скоростей

$$\begin{aligned} V_x &= \dot{r}(t)\cos\varphi(t) - r(t)\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t) \\ V_y &= \dot{r}(t)\sin\varphi(t) + r(t)\dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t) \end{aligned} \quad (45)$$

Для большей ясности в формулах введена явная функциональная зависимость от времени. В дальнейшем эту явную зависимость мы отображать не будем. Квадрат скорости равен $\vec{V}^2 = V_x^2 + V_y^2 = r^2\cos^2\varphi - 2\dot{r}r\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi + r^2\varphi^2\sin^2\varphi + 2\dot{r}r\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + r^2\varphi^2\cos^2\varphi$.

Или, приведя подобные члены,

$$\vec{V}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2. \quad (46)$$

Эти формулы и последующие соотношения удобно получать, если ввести единичный вектор $\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ и единичный вектор $\overline{p}_0$, перпендикулярный вектору $\bar{r}_0$ и «поворачивающий» вектор $\bar{r}$ против часовой стрелки (см. рис.20).

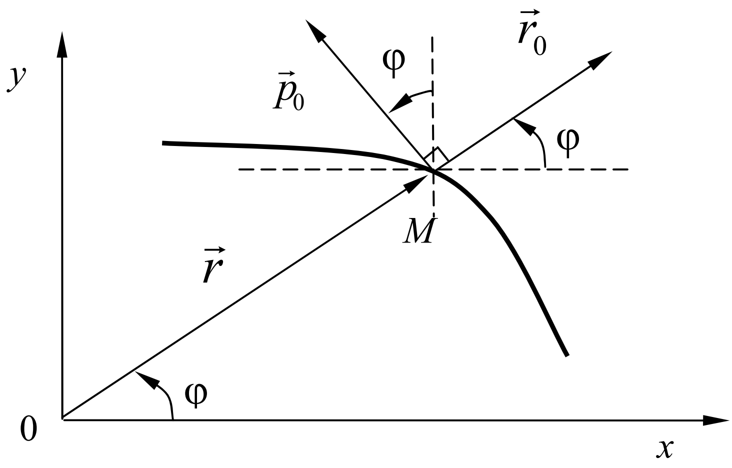


Рис.20.

В декартовой системе координат координаты векторов $\bar{r}_0$ и $\bar{p}_0$, имеют вид

$$\begin{matrix} r_{o,x} = \cos\varphi \\ r_{0,y} = \sin\varphi \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} p_{0,x} = -\sin\varphi \\ p_{0,y} = \cos\varphi \end{matrix} . \qquad (47)$$

Производные этих векторов имеют вид

$$\begin{matrix} \dot{r}_{o,x} = -\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{r}_{0,y} = \dot{\varphi}\cos\varphi \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} \dot{p}_{0,x} = -\dot{\varphi}\cos\varphi \\ p_{0,y} = -\dot{\varphi}\sin\varphi \end{matrix} . \qquad (48)$$

В векторной записи эти формулы выглядят так

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\varphi}\vec{p} \quad \text{и} \quad \dot{\vec{p}} = -\dot{\varphi}\vec{r} . \qquad (49)$$

Тогда

$$\vec{V} = \vec{r}\,' = (r\bar{r}_0)' = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\vec{r}}_0 = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\varphi}\vec{p}_0 . \qquad (50)$$

Соответственно проекции вектора скорости на орты $\vec{r}_0$ и $\vec{p}_0$ будут:

$$\begin{matrix} V_r = \dot{r} \\ V_p = r\dot{\varphi} \end{matrix} . \qquad (51)$$

Из этих соотношений непосредственно следует формула (46) для квадрата скорости.

Пользуясь формулами (50) и (49) легко находится выражение для ускорения в полярных координатах. Используя сначала (49) получим:

$$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = (\dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\varphi}\vec{p}_0)' == \ddot{r}\vec{r}_0 + \dot{r}\dot{\vec{r}}_0 + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{p}_0 + r\ddot{\varphi}\vec{p}_0 + r\dot{\varphi}\dot{\vec{p}}_0 =$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{r}_0 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\,\vec{p}_0\,. \qquad (52)$$

То есть

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{r}_0 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{p}_0\,. \qquad (53)$$

Если воспользоваться тождеством $2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r}(2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}) = \frac{1}{r}(r^2\dot{\varphi})'$, то получим еще одну часто встречающуюся формулу для ускорения

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{r}_0 + \frac{1}{r}(r^2\dot{\varphi})'\vec{p}_0\,. \qquad (54).$$

Пусть наша точка движется по окружности, центр которой находится в начале координат, с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}$. Тогда в (53) остается только одно, хорошо известное из школьного курса физики слагаемое $-r\dot{\varphi}^2 = r\omega^2$.

Если наша точка движется по окружности с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi} = \omega$ и еще совершает движение с постоянной скоростью вдоль радиуса *r*, то появляется еще одно слагаемое $2\dot{r}\dot{\varphi}\vec{p}_0$, называемое **кориолисовым** ускорением.

Отметим еще одно свойство формулы (54). Если движение нашей точки происходит в условиях, когда ее момент количества движения сохраняется (ниже будет показано, что тогда секторная скорость постоянна), то в (54) слагаемое $\frac{1}{r}(r^2\dot{\varphi})'\vec{p}_0$ обращается в ноль.

2.2. Разложение ускорения на тангенциальное и нормальное ускорение. Радиус кривизны

Пусть точка движется по некоторой траектории. Введем два единичных орта $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ таких, что

$$\vec{V} = V\vec{\tau} \tag{55}$$

и $\vec{n} \perp \vec{\tau}$ $|\vec{n}| = 1$ (см. рис. 21).

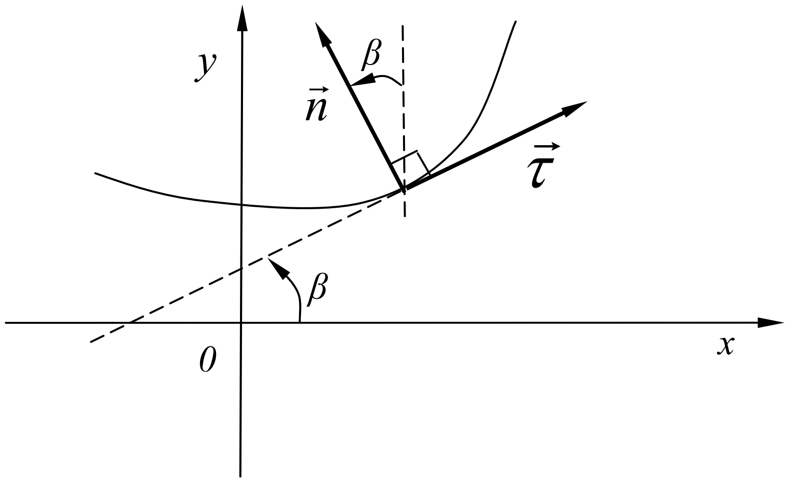


Рис. 21.

Из рисунка видно, что

$$\begin{matrix} \tau_x = \cos\beta \\ \tau_y = \sin\beta \end{matrix}, \text{ а } \begin{matrix} n_x = -\sin\beta \\ n_y = \cos\beta \end{matrix}. \tag{56}$$

Из этих формул следует что $\dot{\vec{\tau}} = \dot{\beta}\vec{n}$. Тогда, продифференцировав (55) получим, что ускорение имеет вид

$$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = (V\vec{\tau})' = \dot{V}\vec{\tau} + \dot{\beta}V\vec{n}. \tag{57}$$

Вычислим $\dot{\beta}$. Для этого воспользуемся тем, что $tg\beta = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ тогда

$\beta = arctg \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ и, следовательно,

$$\dot{\beta} = \left(arctg\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2} \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \tag{58}$$

где производные берутся по времени. Если известно как зависят от времени декартовы координаты, то задача разложения ускорения на касательную и нормальную составляющую, выполнено. Но выражению (58) можно придать еще больший физический смысл. Для этого введем понятие **радиуса кривизны.** Пусть на плоскости имеется линия, представляющая собой траекторию движения и на ней точка M_0. Сместимся от нее вправо (или влево, что не принципиально) в точку M. Проведем касательные к траектории в точках M_0 *и* M (рис. 22)

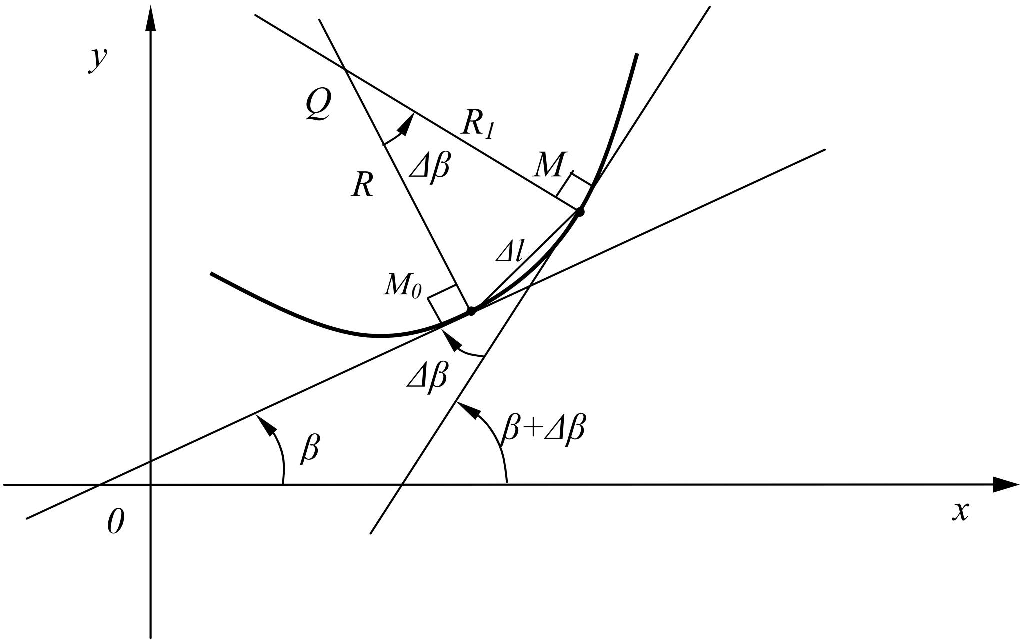


Рис. 22.

Из треугольника M_0QM и определения углов в радианной мере, следует, что при малости угла $\Delta\beta$ длина хорды Δl примерно равна длине дуги и тогда имеем $\Delta\beta \cong \dfrac{\Delta l}{R}$. Откуда следует $R \cong \dfrac{\Delta l}{\Delta\beta}$. Исходя из этих соображений, введем **радиус кривизны** как следующий предел:

$$R = \lim_{\Delta\beta\to 0}\frac{\Delta l}{\Delta\beta} = \lim_{\Delta\beta\to 0}\frac{\dfrac{\Delta l}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta\beta}{\Delta t}} = \frac{\dot{l}}{\dot{\beta}}. \qquad (59).$$

Но $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, следовательно

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,, \qquad (60).$$

или
$$\frac{dl}{dt} = \left|\vec{V}\right|. \qquad (61)$$

Тогда из формулы (59) получим

$$\dot{\beta} = \frac{V}{R}, \qquad (62)$$

а выражение (57) примет хорошо известный вид:

$$\vec{a} = \dot{V}\vec{\tau} + \frac{V^2}{R}\vec{n}\,. \qquad (63)$$

Осталось получить формулы, по которым можно вычислять радиус кривизны R. Для этого, подставим (58) и (60) в (59),. Тогда получим

$$R = \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}\,. \qquad (61)$$

Если y непосредственно зависит от x, то, полагая $x=t$, из (61) легко получим:

$$R = \frac{\left(1 + \dot{y}(x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\ddot{y}(x)}\,. \qquad (62)$$

2.3. Закон сохранения энергии и задача двух тел.

В школьном курсе физики закон сохранения энергии вводился для потенциальных полей, которые не менялись со временем. У нас же два тела взаимодействующих по закону кулоновского типа все время меняют свое положение в пространстве. Так как законы сохранения следуют из уравнений Ньютона, то мы будем исходить из них.

$$\begin{cases} m_1\dfrac{dV_1}{dt} = F_1 = \dfrac{\alpha}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) \\ m_2\dfrac{dV_2}{dt} = F_2 = -\dfrac{\alpha}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) \end{cases}. \qquad (63)$$

где $\alpha = Gm_1m_2$ (в случае гравитационного взаимодействия), или $\alpha = -ke_1e_2$ (в случае электростатического взаимодействия двух зарядов). Докажем, что величина, называемая энергией

$$E = \frac{m_1\vec{V}_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} - \frac{\alpha}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \tag{64}$$

сохраняется со временем. Для этого продифференцируем потенциальную энергию:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{\alpha}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}\right) = -\alpha\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}}\right) =$$

$$= \alpha\frac{((x_1-x_2)(\dot{x}_1-\dot{x}_2) + (y_1-y_2)(\dot{y}_1-\dot{y}_2) + (z_1-z_2)(\dot{z}_1-\dot{z}_2))}{\left(\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}\right)^3} =$$

$$= \frac{\alpha}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)(\vec{V}_1 - \vec{V}_2) \; .$$

Продифференцируем кинетическую энергию и воспользуемся уравнениями Ньютона (63) для того, чтобы избавиться от производных от скорости (ускорений):

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\vec{V}_1^2}{2} + \frac{m_2\vec{V}_2^2}{2}\right) = m_1\vec{V}_1\dot{\vec{V}}_1 + m_2V_2\dot{\vec{V}}_2 =$$

$$= \overline{V}_1\frac{\alpha}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) - \vec{V}_2\frac{\alpha}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) =$$

$$= \frac{\alpha}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}\left[(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\overline{V}_1 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\overline{V}_2\right] = -\frac{\alpha}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)(\overline{V}_1 - \overline{V}_2).$$

Из полученных выражений видно, что $\frac{dU}{dt} + \frac{dt}{dt} = 0$. Следовательно, энергия постоянна и не зависит от времени.

2.4. Закон сохранения момента количества движения и задача двух тел.

Докажем, что в случае отсутствия внешних сил и наличия только центральных сил, момент количества движения системы, состоящей из N материальных точек, сохраняется.

Выберем в пространстве начало отсчета и рассмотрим $\vec{L}$ - сумму моментов количества движения всех материальных точек системы, равной сумме векторных произведений

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \, \vec{p}_i\right]. \tag{65}$$

Где $\vec{p}_i = m_i \vec{V}_i$ - импульс i –ой материальной точки. Тогда

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\left(\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt}\,\vec{p}_i\right] + \left[\vec{r}_i\,\frac{d\vec{p}_i}{dt}\right]\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\left[\vec{V}_i m_i \vec{V}_i\right] + \left[\vec{r}_i\,\frac{d\vec{p}_i}{dt}\right]\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i\,\frac{d\vec{p}_i}{dt}\right] = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\left[\vec{r}_i \vec{F}_{i,j}\right].$$

В последней сумме ведется суммирование по j - всем силам $\vec{F}_{i,j}$ действующим на i –ую материальную точку. Поскольку система замкнутая, а силы центральные, то каждой силе действия найдется коллинеарная ей сила противодействия. Таким парам соответствуют суммы вида

$$\left[\vec{r}_k \vec{F}_{k,n}\right] + \left[\vec{r}_n \vec{F}_{n,k}\right]. \tag{66}$$

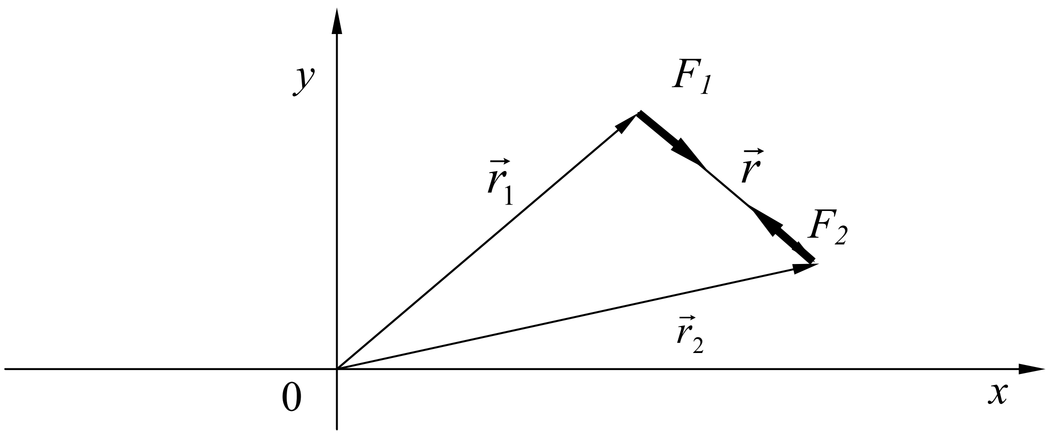


Рис. 23

Причем $\vec{F}_{k,n} = -\vec{F}_{n,k} = \vec{F}$. Тогда выражение (66) примет вид $\left[(\vec{r}_k - \vec{r}_n)\vec{F}\right]$. Но вектор $(\vec{r}_k - \vec{r}_n)$ колинеарен вектору $\vec{F}$. Следовательно, векторное произведение $\left[(\vec{r}_k - \vec{r}_n)\vec{F}\right] = 0$, и $\frac{dL}{dt} = 0$, следовательно, сумма моментов количества движения сохраняется. Если система тел состоит из неподвижного силового центра движущегося вокруг него тела, то сохраняется момент количества движения движущегося тела. Случай двух тел – это частный случай доказанной более общей теоремы.

Докажем, что в случае когда сохраняется момент количества движения материальной точки, то она совершает плоское движение.

Пусть $\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]$ сохраняется. Это значит, что, расписав это равенство по осям координат, получим систему уравнений

$$\begin{cases} myV_z - mzV_y = L_x \\ mzV_x - mxV_z = L_н \\ mxV_y - myV_x = L_я \end{cases}. \tag{67}$$

Умножим первое уравнение на x второе уравнение на у, а третье на z и сложим их. Получится уравнение:

$$L_x x + L_y y + L_z z = 0. \tag{68}$$

Имея в виду, что L_x, L_y, L_z величины постоянные. Уравнение (68) представляет собой уравнение плоскости, проходящей через начало координат.

2.5. Секторная скорость.

Пусть материальная точка M движется по плоской траектории, и ее положение определяется в полярных координатах радиусом вектором $\vec{r}$, углом φ, а за полярную ось примем ось абсцисс x.

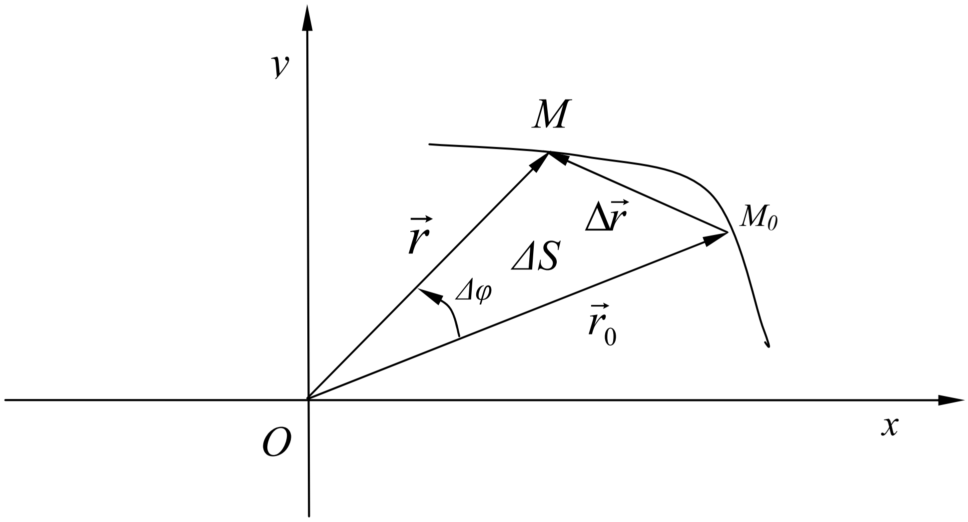


Рис. 24

Пусть за малое время Δt материальная точка переместится из положения M_0 в положение M (см. рис. 24). Рассмотрим вектор $\Delta\vec{S}$, определенный следующим равенством:

$$\Delta\vec{S} = \frac{1}{2}\left[\vec{r}\Delta\vec{r}\right], \tag{69}$$

Где $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{M_0M}$

Из определения векторного произведения следует, что величина этого вектора равна удвоенной площади треугольника OM_0M. Выражение

$$\vec{V}_{сект} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}\left[\vec{r}\,\vec{V}\right] = \frac{1}{2m}\vec{L} \tag{70}$$

будем называть **секторной скоростью**. Отсюда следует, что если момент количества движения материальной точки сохраняется, то сохраняется и секторная скорость. Это утверждение эквивалентно утверждению, что за равные промежутки времени радиус-вектор заметает равные площади, а это есть один их законов **Кеплера.**

. Если принять во внимание выражение (50), то

$$\left|\Delta\vec{S}\right| = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \quad . \tag{71}$$

2.6. Космические скорости.

Первая космическая скорость $\boldsymbol{V_I}$ – это скорость, с которой космический корабль с массой m движется по круговой орбите радиуса r вокруг тела обладающего массой M, много большей чем масса космического корабля. Напишем уравнение движения

$$ma = GMm/r^2 . \tag{72}$$

Воспользуемся выражением для ускорения тела, движущегося по окружности радиуса r со скоростью V_I, $a = \frac{V_I^2}{r}$, Откуда немедленно получаем

$$V_I = \sqrt{\frac{GM}{r}} . \tag{73}$$

Вторая космическая скорость $\boldsymbol{V_{II}}$ – это минимальная скорость, которую нужно сообщить находящемуся на поверхности Земли телу для того, чтобы оно покинуло Землю и удалилось на бесконечность. Для ее нахождения воспользуемся законом сохранения полной механической энергии, а влияние Земли на наше тело будем учитывать как неподвижный центр притяжения. В предыдущих главах было показано, что в случае, когда имеются неподвижные центры притяжения, закон сохранения энергии выполняется. Запишем его.

$$\frac{mV_{II}^2}{2} - \frac{GmM}{R_З} = 0, \tag{74}$$

где $R_З$ – радиус Земли. В правой части уравнения стоит ноль, так как на бесконечности потенциальная энергия притяжения равна нулю, а чтобы V_{II} была минимальной, кинетическая энергия на бесконечности так же должна быть равной нулю.

Из (74) немедленно получаем

$$V_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R_З}} . \tag{75}$$

Третью космическую скорость V_{III} мы определим как минимальную скорость, которую нужно сообщить телу, находящемуся на поверхности Земли, что бы оно покинуло пределы Солнечной системы. Разумно воспользоваться тем фактом, что Земля движется вокруг Солнца со скоростью, равной первой космической скорости V_{IC}, относительно Солнца ($V_{IC} = \sqrt{\frac{GM_C}{R_{O3}}}$. где M_C – масса Солнца, а R_{O3} – радиус орбиты Земли вокруг Солнца.) Для этого направим начальную скорость V_{III} нашего тела по ходу вращения Земли вокруг Солнца. Тогда, если тело удалится от Земли на достаточно большое расстояние, и будет иметь там не нулевую скорость $V_{от}$ относительно Земли, то относительно Солнца его скорость будет равна скорости Земли плюс скорость $V_{от}$. Если эта сумма скоростей будет равна второй космической скорости относительно Солнца $V_{IIC} = \sqrt{\frac{2GM_C}{R_{O3}}}$, то наше тело покинет пределы Солнечной системы. Выпишем это условие $V_{от}+V_{IC}=V_{IIc}$. Следовательно $V_{от} = V_{IIC} - V_{IC}$. В процессе удаления тела от Земли его расстояние до Солнца практически останется неизменным и поэтому влиянием Солнца можно пренебречь. Тогда для нахождения V_{III} мы можем воспользоваться законом сохранения энергии, аналогичным (74), но в отличие от него в правой части будет присутствовать кинетическая энергия нашего тела

$$\frac{mV_{III}^2}{2} - \frac{GmM}{R_З} = \frac{mV_{от}{}^2}{2} = \frac{m(V_{IIC} - V_{IC})^2}{2} .$$

(76)

Откуда

$$V_{III}{}^2 = (V_{IIC} - V_{IC})^2 + \frac{2GM}{R_З} = (V_{IIC} - V_{IC})^2 + V_{II}^2 \qquad (77)$$

3. КЕПЛЕРОВА ЗАДАЧА.

3.1. Решение уравнений движения.

Напишем еще раз уравнения Ньютона, которые описывают движение двух тел массой m_1 *и* m_2 как движение двух материальных точек взаимодействующих друг с другом посредством центральных сил, которые обратно пропорциональны квадрату расстоянию между ними:

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \dfrac{\alpha}{|\vec{r}_2 - \vec{r}\,|^3}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) & (78) \\ m_2 \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\dfrac{\alpha_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) & (79) \end{cases}$$

где $\alpha = Gm_1 m_2$ (в случае гравитационного взаимодействия), или $\alpha = -ke_1 e_2$ (в случае электростатического взаимодействия двух зарядов). С точки зрения математики это система из шести дифференциальных уравнений второго порядка. Как известно из теоремы Коши, если задать в начальный момент времени координаты тел $\vec{r}_{1,н}$ и $\vec{r}_{2,н}$, а также их скорости $\vec{V}_{1,н}$ и $\vec{V}_{2,н}$, то задача всегда имеет решение и оно единственное. Обратим внимание на то обстоятельство, что переменные $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ входят как в уравнения (78) так и в уравнение (79), то есть они «перемешаны». Упростим нашу задачу. Для этого сначала сложим векторные уравнения (78) и (79). Тогда получим уравнение

$$\frac{d^2(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)}{dt^2} = 0. \qquad (80)$$

Помножим и разделим правую часть на $m_1 + m_2$, Получим что $(m_1 + m_2)\dfrac{d^2\dfrac{(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)}{m_1 + m_2}}{dt^2} = 0$. Введем массу $M = m_1 + m_2$ и радиус вектор центра тяжести частиц

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \tag{81}$$

Тогда уравнение (80) примет вид: $M\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2} = 0$.

Далее, умножим правую и левую части уравнения (78) на m_2, а правую и левую части уравнения (79) на m_1 и вычтем из (79) уравнения уравнение (78). Результат разделим на $m_1 + m_2$ и получим уравнение $\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dfrac{d^2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{dt^2} = -\dfrac{\alpha}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$. Далее, обозначим

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{82}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \tag{83}$$

В новых обозначениях мы приходим к уравнению: $\mu\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\dfrac{\alpha}{r^3}\vec{r}$. После объединения получившихся уравнений мы получаем систему состоящую из двух независимых векторных уравнений:

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2} = 0 & (84) \\ \mu\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\dfrac{\alpha}{r^3}\vec{r} & (85) \end{cases}.$$

Видно, что переменная $\vec{R}$ входит только в первое векторное уравнение, а переменная $\vec{r}$ только во второе векторное уравнение системы. В результате мы имеем два независимых векторных уравнения.

Первое уравнение (84) описывает движение центра масс с постоянной скоростью $\vec{V}_{цм}$.

Второе уравнение (85) описывает движение некоего абстрактного тела, обладающего массой μ, в центральном поле кулоновского типа. Его скорость мы обозначим как $\vec{V}$. Это уравнение мы и будем решать в дальнейшем. Если мы его решим, то, используя формулы (81) и (83) (разрешая их относительно $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$), мы сможем найти траектории движения наших тел массой m_1 и m_2.

$$\begin{gathered} \vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \end{gathered}. \tag{86}$$

Начальные координаты $\vec{r}_{1,н}$, $\vec{r}_{2,н}$ и скорости $\vec{V}_{1,н}$, $\vec{V}_{2,н}$ тел массой m_1 и m_2. легко пересчитываются в начальные координаты и скорости центра масс и тела массой μ. $\vec{R}_н = \dfrac{m_1\vec{r}_{1,н} + m_2\vec{r}_{2,н}}{m_1 + m_2}$, $\vec{V}_{цм} = \dfrac{m_1\vec{V}_{1,н} + m_2\vec{V}_{2,н}}{m_1 + m_2}$, $\vec{r}_н = \vec{r}_{2,н} - \vec{r}_{1,н}$, $\vec{V}_н = \vec{V}_{2,н} - \vec{V}_{1,н}$. Следовательно, задавая начальные условия для исходной системы уравнений (78) и (79), мы можем получить изначальные условия для системы независимых дифференциальных уравнений (84) и (85) и тем самым удовлетворить условию теоремы Коши о существовании и единственности решения дифференциальных уравнений (84) и (85).

Мы не будем «решать в лоб» уравнение (85). Как было доказано ранее, в системе координат, связанной с центром взаимодействия, выполняется закон сохранения энергии и момента импульса. Воспользуемся этим обстоятельством и запишем эти законы в полярной системе координат для материальной точки обладающей массой μ.

$$E = \frac{\mu V^2}{2} - \frac{\alpha}{r} \tag{87}$$

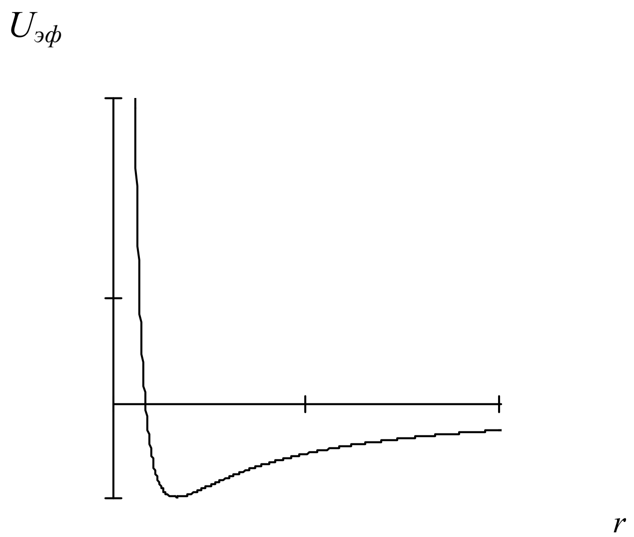
$$\vec{L} = \mu\left[\vec{r}\vec{V}\right]. \tag{88}$$

где E – энергия частицы; L – ее момент количества движения. Запишем эти законы в полярной системе координат, воспользовавшись выражением $\vec{V} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\varphi}\vec{p}_0$ для скорости в полярной системе координат. Расположим начало координат в плоскости движения тел. Вектора $\vec{r}_0$ и $\vec{p}_o$ – единичные ортогональные вектора ($\vec{r}_0 = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, а вектор $\vec{p}_o$ таков, что вектор $\left[\vec{r}_0 \vec{p}_o\right]$ направлен в направлении оси z). Тогда

$$\begin{cases} E = \dfrac{\mu \dot{r}^2}{2} + \dfrac{\mu r^2 \dot{\varphi}^2}{2} - \dfrac{\alpha}{r} & (89) \\ L = \mu r^2 \dot{\varphi} & (90) \end{cases}.$$

Слагаемое $U_{эф} = \dfrac{\mu r^2 \dot{\varphi}^2}{2} - \dfrac{\alpha}{r} = \dfrac{L^2}{2\mu r^2} - \dfrac{\alpha}{r}$ называется “эффективной” потенциальной энергией для одномерной задачи, а $\dfrac{L^2}{2\mu r^2}$ – центробежной.

$U_{эф}$ имеет вид



Выразим $\dot{\varphi}$ из второго уравнения системы и подставим ее в первое. Получим уравнения:

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{\mu}\sqrt{2\mu E + \dfrac{2\alpha\mu}{r} - \dfrac{L^2}{r^2}} \\ \dot{\varphi} = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{L}{r^2} \end{cases}. \qquad (91)$$

Так как φ и r зависят от t как от параметра, то, воспользовавшись правилом нахождения производной функции заданной параметрически, хорошо известным из курса математического анализа, получим:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{dr}{dt}} = \frac{\frac{L}{r^2}}{\sqrt{2\mu E + \left(\frac{\alpha\mu}{L}\right)^2 - \left(\frac{L}{r} - \frac{\alpha\mu}{L}\right)^2}}. \tag{92}$$

Введем, для простоты, новые переменные $a = \frac{L}{r} - \frac{\alpha\mu}{L}$ и $b^2 = 2\mu E + \left(\frac{\alpha\mu}{L}\right)^2$.

Тогда

$$\frac{da}{dr} = -\frac{L}{r^2}, \tag{93}$$

а

$$\frac{d\varphi}{da} = \frac{\frac{d\varphi}{dr}}{\frac{da}{dr}} = -\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}, \tag{94}$$

в новых переменных. Интегрируя по a, получаем:

$$\varphi = \arccos\frac{a}{b} + \varphi_0, \tag{95}$$

где φ_0 − постоянная, определяемая начальными условиями. Возвращаясь к старым переменным, получим:

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{1 - \frac{L^2}{\alpha\mu}\frac{1}{r}}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\alpha^2\mu}}}. \tag{96}$$

Обозначив

$$\frac{L^2}{\alpha\mu} = p, \tag{97}$$

$$\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\alpha^2\mu}} = \varepsilon. \tag{98}$$

легко получить:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)}. \tag{99}$$

Таким образом, мы получили **уравнение кривой второго порядка в полярных координатах.** Если заданы начальные координаты и скорости наших тел, то легко найти энергию и момент количества движения частицы массой μ, а, следовательно, и коэффициенты p и ε, а значит форму и размер траектории. Остается только вопрос о положении этой траектории в пространстве относительно начальных координат и скоростей, а так же вопрос о зависимости r и φ от времени, но на них мы дадим ответ позднее. А пока исследуем форму траектории

Если p>0, а ε<1,то, как известно, траектория имеет форму эллипса. Из формул (97) и (98) следует, что этот случай осуществляется, когда α>0, а E<0. Это означает, что между телами существует притяжение, а скорость их относительного движения меньше второй космической скорости.

Если p>0, а ε=1, то траектория имеет форму параболы.

Если **p>0, а ε>1**, то форму гиперболы. Отметим, что начало радиуса вектора находится «внутри» траектории. Эти случаи так же соответствуют притяжению между телами, но теперь их кинетической энергии (в системе центра масс) достаточно ($E \geq 0$) что бы тела удались друг от друга на бесконечно большое расстояние.

Если **p<0** то это означает, что между телами существует отталкивание ($\alpha < 0$) и, следовательно, энергия E>0. ($E = \frac{\mu \vec{V}^2}{2} - \frac{\alpha}{r}$). а $\varepsilon > 1$. Это означает, что траектория имеет вид гиперболы, а начало радиуса вектора находится «вне» ее.

3.2. Начальные условия в некоторых характерных точках траектории.

Пусть задана постоянная взаимодействия, массы тел начальное положение тел в пространстве, их начальные скорости. Наша задача свелась к решению задачи о движении тела эффективной массы μ, в поле с центральной силой кулоновского типа. Рассмотрим некоторые особые точки траектории, задание в которых начальных условий для тела массой μ, наиболее просто определяет вид траектории.

А) Самый простой случай осуществляется, если в начальный момент времени известно расстояние до центра масс, известен модуль начальной скорости, а так же известно, что вектор скорости перпендикулярен радиусу вектору. Тогда мы без труда можем вычислить энергию E, момент количества движения L, а через них по формулам (97) и (98) вычисляются параметры p и ε входящие в уравнение (99). Затем, используя законы сохранения энергии и момента количества движения:

$$\begin{cases} E = \dfrac{\mu V_н^2}{2} - \dfrac{\alpha}{r_н} = \dfrac{\mu V_x^{\ 2}}{2} - \dfrac{\alpha}{r_x}, \\ L = \mu V_н r_н = \mu V_x r_x \end{cases} \qquad (100)$$

и, решая их относительно V_x r_x, мы ответим на вопрос: в афелии или перигелии находится в начальный момент времени наше тело? Ответ на этот вопрос определяет значение фазы φ_0 в формуле (98). Так как эта система имеет два решения: одно очевидное $V_x = V_н$, а другое $V_x = V_н(\dfrac{2V_I^{\ 2}}{V_н^{\ 2}} - 1)$ (где V_I – первая космическая скорость в начальной точке), то, сравнивая их, мы и получаем искомый ответ.

В) Есть еще одна замечательная точка на траектории, задание в которой вектора скорости позволяет очень просто найти параметры траектории. Эта точка получается при пересечении траектории с перпендикуляром, восстановленным из центра масс (фокуса) к оси симметрии траектории, которая проходит через фокусы траектории (см. рис. 25). Разложим начальную скорость $\bar{V}$ на две ортогональные составляющие: v – проекцию скорости на наш перпендикуляр, и u – проекцию скорости на ось симметрии, которая проходит через фокусы траектории. Пусть так же задано расстояние p от этой точки до фокуса.

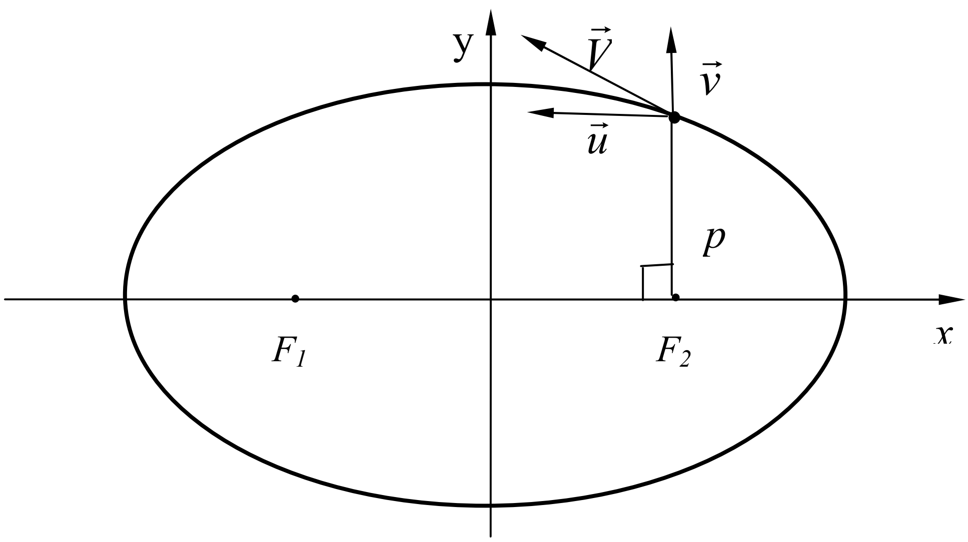


Рис. 25.

Тогда для момента количества движения имеем равенство $L = \mu p u$. С другой стороны $p = \dfrac{L^2}{\alpha\mu}$. Подставив в это равенство значение *L*, получим что

$$u = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu p}}\,, \tag{102}$$

Если учесть что в случае гравитационного взаимодействия $\alpha = Gm_1 m_2$, то *u* – равна первой космической скорости в начальной точке траектории и учитывая, что $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ получим

$$u = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{p}}\,. \tag{103}$$

Воспользуемся этим обстоятельством и выразим параметр ε через *u* и *v*. Для этого сначала найдем связь энергии *E* с *u* и *v*. $E = \dfrac{\mu u^2}{2} + \dfrac{\mu v^2}{2} - \dfrac{\alpha}{p}$. Из (102) следует, что $\dfrac{\alpha}{p} = \mu u^2$. Тогда $E = \dfrac{\mu u^2}{2} + \dfrac{\mu v^2}{2} - \mu u^2 = -\dfrac{\mu u^2}{2} + \dfrac{\mu v^2}{2}$.

Согласно (98) $\varepsilon = \sqrt{1 + \dfrac{2EL^2}{\alpha^2\mu}} = \sqrt{1 + \dfrac{2(\mu p u)^2}{\alpha^2\mu}\left(-\dfrac{\mu u^2}{2} + \dfrac{\mu v^2}{2}\right)} =$

$$= \sqrt{1 + \frac{2}{\mu u^2}\left(-\frac{\mu u^2}{2} + \frac{\mu v^2}{2}\right)} = \frac{v}{u}$$. Окончательно:

$$\varepsilon = \frac{v}{u} . \qquad (104).$$

В результате получаем следующие выражение для траектории движения:

$$r = \frac{p}{1 - \frac{v}{u}\sin\beta} . \qquad (105)$$

Где β - угол, между радиусом вектором и перпендикуляром к оси симметрии, проходящей через фокусы кривой второго порядка (см. рис 26). Такая форма записи уравнения движения будет удобна нам в дальнейшем.

Если мы знаем u и v в этой особой точке, то легко, не прибегая к дифференцированию, найти скорость $\vec{V}$ нашего тела массой μ при любом значении угла β.

Чтобы решить эту задачу, разложим скорость на два не ортогональных направления: одно перпендикулярно радиусу вектору $\vec{r}$ обозначаемое нами как $\vec{V}_{\perp}$, а другое направление| перпендикулярное к оси симметрии, проходящей через фокусы кривой второго порядка, обозначаемое как $\vec{V}_{\parallel}$ (на рисунке 25 параллельно оси y).

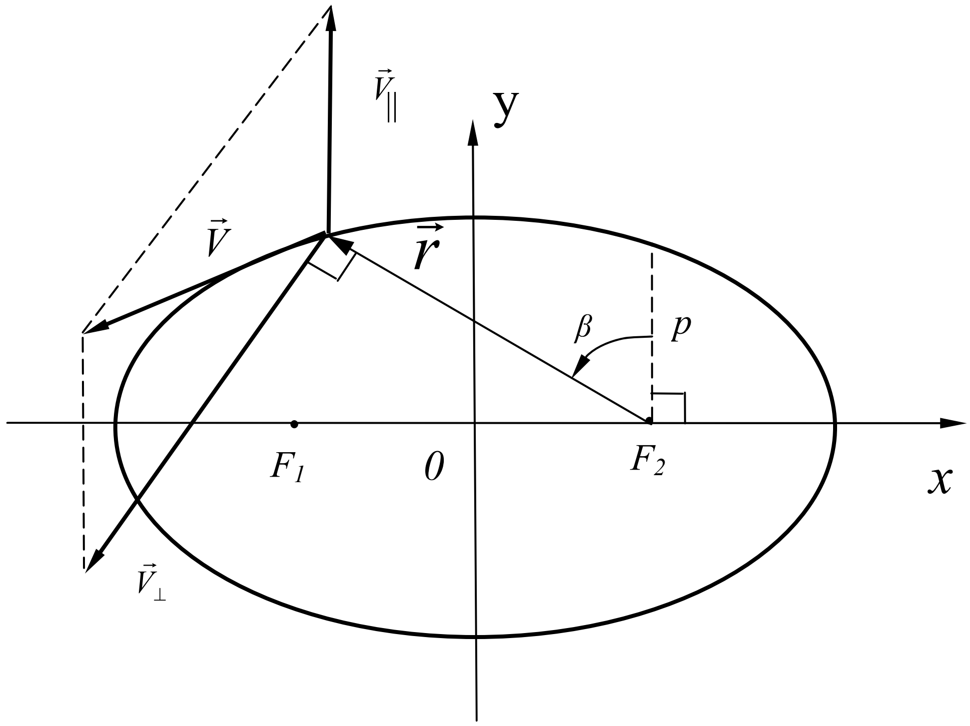


Рис. 26.

Для этого сначала, вычислим по известным формулам радиальную $V_r = \dot{r}$ и трансверсальную $V_t = r\dot{\beta}$ составляющие скорости. Затем радиальную составляющую $\vec{V}_r$ разложим по выбранным нами направлениям: $\vec{V}_r = \vec{V}_{r\perp} + \vec{V}_{r\|}$ и сложим параллельные вектора $\vec{V}_t$ и $\vec{V}_{r|\perp}$. Для реализации этого плана воспользуемся законом сохранения момента количества движения.

$$L = \mu r V_t \, , \tag{106}$$

или

$$L = \mu r^2 \dot{\beta} \, . \tag{107}$$

В начальный момент времени

$$L = \mu p u \, . \tag{108}$$

Приравнивая правые части выражения (106) и (108) и используя уравнение движения (105), получим: $V_t = \dfrac{up}{r} = up\dfrac{1 - \frac{v}{u}\sin\beta}{p} = u - v\cdot\sin\beta$.

То есть

$$V_t = u - v\sin\beta\,. \qquad (109)$$

В свою очередь, приравнивая (107) и (108) и используя уравнение движения (105), найдем значение $\dot{\beta}$:

$$\dot{\beta} = \frac{up}{r^2} = up\frac{\left(1-\frac{v}{u}\sin\beta\right)^2}{p^2} = \frac{u}{p}\left(1-\frac{v}{u}\sin\beta\right)^2. \qquad (110).$$

Теперь мы легко найдем V_r - радиальную составляющую скорости:

$$V_r = \dot{r} = \frac{d\left(\frac{p}{1-\frac{v}{u}\sin\beta}\right)}{dt} = \frac{p}{\left(1-\frac{v}{u}\sin\beta\right)^2}\frac{v}{u}\cos\beta\dot{\beta} =$$

$$= \frac{p\frac{v}{u}\cos\beta}{\left(1-\frac{v}{u}\sin\beta\right)^2}\frac{u}{v}\left(1-\frac{v}{u}\sin\beta\right)^2 = v\cos\beta$$. То есть

$$V_r = v\cos\beta\,. \qquad (111)$$

Разложим вектор $\overline{V_r}$ по правилу параллелограмма на два вектора, один из которых перпендикулярен вектору $\bar{r}$ (обозначенный нами как $\vec{V}_{r|\perp}$), а другой (обозначенный как вектор $\vec{V}_{r\|}$) перпендикулярен оси симметрии траектории, проходящей через ее фокусы.

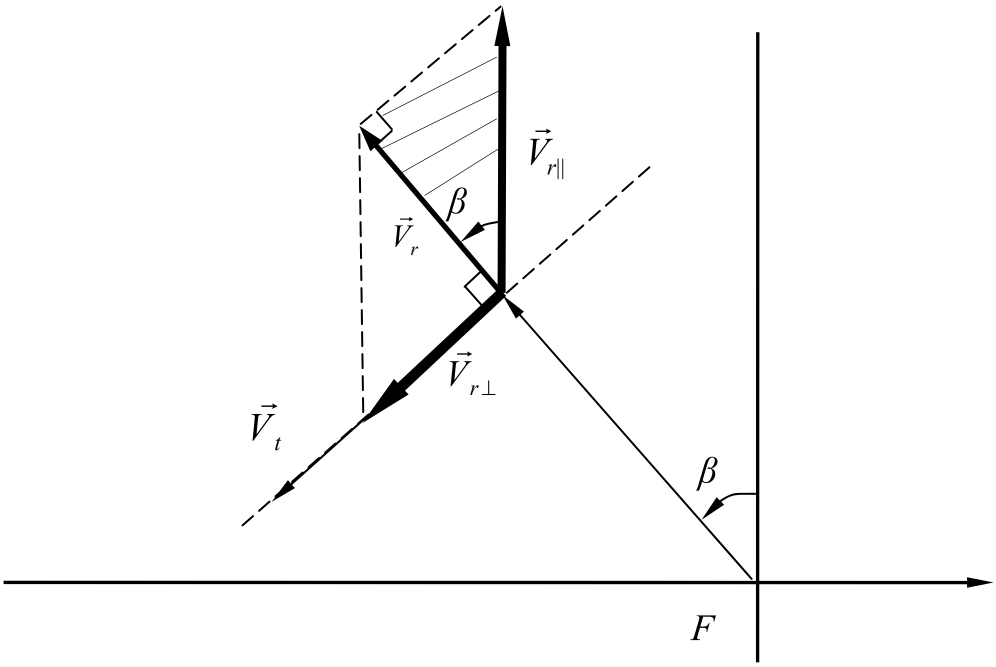


Рис. 27.

На рисунке 27 они изображены жирными стрелками. Из заштрихованного прямоугольного треугольника легко видеть, что: $V_{r\|} = \dfrac{V_r}{\cos\beta} = \dfrac{v\cos\beta}{\cos\beta} = v$, - то есть:

$$V_{r\|} = v, \tag{112}$$

но вектор $\vec{V}_{r\|}$ - это и есть вектор $V_{\|}$. Следовательно

$$V_{\|} = v. \tag{113}$$

Вектор $\vec{V}_t$ параллелен вектору $\vec{V}_{r\perp}$ и должен складываться с ним. Из того же заштрихованного треугольника находим: $V_{r\perp} = V_r tg\beta = v\cos\beta \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = v\sin\beta$, то есть

$$V_{rt} = v\sin\beta. \tag{114}$$

Вектор $\overline{V_{\perp}}$ состоит из параллельных векторов, $\overline{V_{rt}}$ и $\overline{V_t}$. Сложим эти вектора, и воспользуемся выражением (109) для V_t. Тогда $V_{\perp} = V_t + V_{rt} = u - v\sin\beta + v\sin\beta = u$, то есть

$$V_\perp = u\ . \qquad (115)$$

Таким образом, нами установлен удивительный факт. Если в нашей особой точке известны компоненты скорости u и v, то для нахождения скорости в произвольный момент времени мы должны компоненту v сохранить, а компоненту u поворачивать так, что бы она была все время перпендикулярна радиусу вектор, затем, складывая их как вектора, мы получим скорость в данный момент времени.

3.3. Начальные условия в произвольной точке.

Предположим, что в начальный момент времени известны скорости наших двух тел и их скорости. Это означает, что для тела с эффективной массой μ известно начальное направление радиуса вектора $\bar{r}$, который мы обозначим, как $\overline{r_н}$, и начальное значение скорости, которую мы обозначим, как $\vec{V}_н$. В свою очередь, то, что мы знаем все о векторах $\overline{r_н}$ и $\vec{V}_н$, означает, что известны модули этих векторов, угол между ними (который мы обозначим как γ) и плоскость, в которой они находятся. Чтобы найти траекторию движения нужно узнать u, v, p и значение угла β в начальный момент времени, обозначаемый нами как $\beta_н$. Найдем их.

Как обычно, воспользуемся законом сохранения момента количества движения. Из рисунка 28 следует что

$$\mu up = \mu V_н r_н \sin\gamma\ . \qquad (116)$$

Ранее мы доказали, что u - это вторая космическая скорость в особой точке

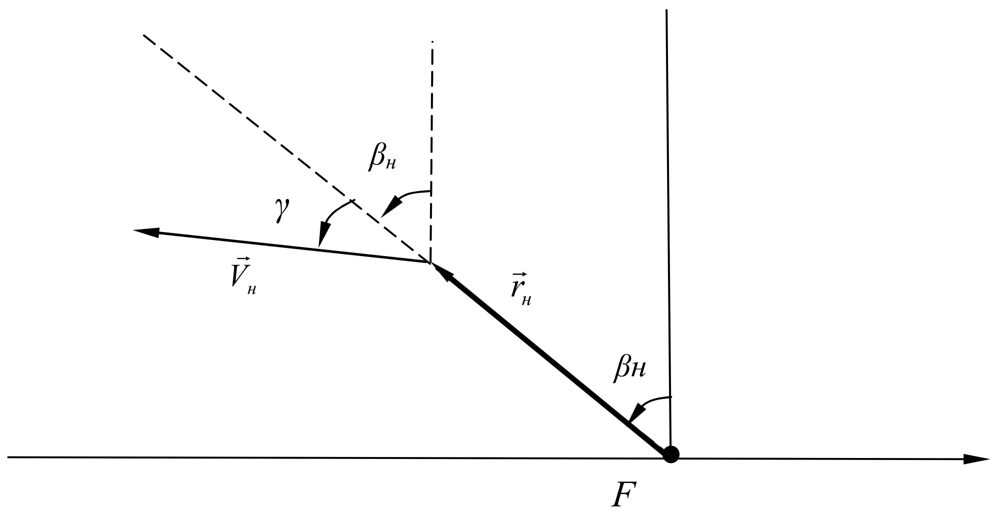


Рис. 28.

$$u = \sqrt{\frac{GmM}{\mu p}} = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{p}}. \qquad (117).$$

Подставляя это значение u в (116) получим

$$p\sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{p}} = V_н r_н \sin\gamma. \qquad (118)$$

Откуда следует, что

$$p = \frac{(V_н r_н \sin\gamma)^2}{G(m_1 + m_2)}. \qquad (119)$$

Подставим полученное значение p в (117) получим

$$u = \frac{G(m_1 + m_2)}{V_н r_н \sin\gamma}. \qquad (120)$$

Чтобы найти v и $\beta_н$, разложим $V_н$ на радиальную и трансверсальную составляющие. Из рис. 27 видно, что радиальная компонента равна $V_н \cos\gamma$, а трансверсальная равна $V_н \sin\gamma$. В предыдущей главе мы получили для них же выражения (109) и (111). В результате получаем систему уравнений

$$\begin{cases} V_н \sin\gamma = u - v\sin\beta_н \\ V_н \cos\gamma = v\cos\beta_н \end{cases}, \qquad (121)$$

или

$$\begin{cases} -V_н \sin\gamma + u = v\sin\beta_н \\ V_н \cos\gamma = v\cos\beta_н \end{cases}. \tag{122}$$

Возводя в квадрат обе чести уравнений и складывая их затем, получим

$$v^2(\sin^2\beta_н + \cos^2\beta_н) = V_н^{\,2}\cos^2\gamma + (u - V_н\sin\gamma)^2. \tag{123}$$

Откуда

$$v = V_н\sqrt{\cos^2\gamma - \left(\frac{u}{V_н} - \sin\gamma\right)^2} = V_н\sqrt{1 + \left(\frac{u}{V_н}\right)^2 - 2\frac{u}{V_н}\sin\gamma}. \tag{124}$$

Поделив, правые и левые части равенств (122) получим

$$tg\beta_н = \frac{u - V_н\sin\gamma}{V_н\cos\gamma}. \tag{125}$$

Таким образом, мы нашли все значения параметров, определяющие форму траекторий наших тел и положение траектории в пространстве.

3.4. Зависимость полярного угла от времени.

Наша задача практически решена, но решена она посредством использования в качестве независимого параметра угла между радиусом вектором и осью симметрии траектории. Нам осталось только связать этот угол со временем. Для этого используем второй закон Кеплера: за равные промежутки времени радиус вектор «заметает» равные площади *S*. Это означает постоянство секторной скорости. Для эллипса это означает что

$$V_{сект} = \frac{S}{t} = \frac{S_{эл}}{T_{обр}}. \tag{126}$$

Тогда

$$t = \frac{S}{S_{эл}}T_{обр} \tag{127}$$

Что бы найти $T_{обр}$ начнем с того, что используем выражение (99) для траектории движения и получим значение максимального удаления нашего тела:

$$r_{\max} = \frac{p}{1-\varepsilon}, \tag{128}$$

а минимальное удаление

$$r_{\min} = \frac{p}{1+\varepsilon}. \tag{129}$$

Как известно из первой главы, большая полуось эллипса

$$a = \frac{1}{2}\left(r_{\max} + r_{\min}\right) = \frac{p}{1-\varepsilon^2}. \tag{130}$$

С другой стороны, половина расстояние между фокусами

$$c = a - r_{\min} = \frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon}. \tag{131}$$

Тогда для малой полуоси эллипса получим выражение

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \sqrt{pa}. \tag{132}$$

Площадь эллипса можно найти по известной формуле

$$S_{эл} = \pi ab = \pi a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}, \tag{133}$$

но из (97) известно, что $p = \dfrac{L^2}{\alpha\mu}$, тогда

$$S_{эл} = \frac{\pi a^{\frac{3}{2}} L}{\sqrt{\alpha\mu}}, \tag{134}$$

С другой стороны

$$S_{эл} = V_{сект} T_{обр}. \tag{135}$$

Воспользуемся выражением (71) $V_{сект} = \dfrac{L}{2\mu}$ и получим

$$S_{эл} = \frac{L}{2\mu} T_{обр}. \tag{136}$$

Приравняв (134) и (136) получим, что

$$T_{обр} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{G(m_1+m_2)}}. \tag{137}$$

Эта формула означает, что отношение квадрата периода к кубу больших полуосей эллипсов постоянно. А это и есть **закон Кеплера**.

Теперь в выражении (126) осталось найти S. При повороте на малый угол $\Delta\varphi$ радиус вектор «заметает» площадь ΔS такую, что $\Delta S \approx \frac{1}{2} r^2 \sin\Delta\varphi \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi$. Тогда

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{p^2 d\varphi}{\left(1 + \frac{v}{u}\cos\varphi\right)^2}. \qquad (131)$$

То есть S является функцией угла φ.. Это означает, что время так же является функцией угла φ

$$t(\varphi) = \frac{S(\varphi)}{S_{эл}} T_{обр} = F(\varphi). \qquad (132)$$

Это, в свою очередь, означает, что можно ввести обратную функцию

$$\varphi = F^{-1}(t) \qquad (133)$$

Теперь задача полностью решена в обычном смысле: исходя из начальных значений координат и скоростей, мы нашли, как зависят от времени координаты наших тел.