

Экспериментальная школа №1189 им. И.В. Курчатова

Газовые законы

Составитель: Бойченко А.М.
Пособие по физике, 10 класс
термодинамика, ч. 1
газовые законы

Москва 2006

Оглавление

1.1 Термодинамика. Введение	3
Три основные положения термодинамики	3
Примерные характеристики атомов и молекул	3
Концентрация	3
Размеры	3
Масса	3
Количество вещества	3
Число Авогадро	4
Молярная масса	4
Броуновское движение	4
Взаимодействие атомов и молекул	5
Термодинамические параметры	5
Тепловое равновесие	5
1.2 Газовые законы	6
Закон Бойля-Мариотта	6
Закон Гей-Люссака	6
Идеальный газ	7
Абсолютная температура	7
Закон Авогадро	8
Уравнение состояния идеального газа	8
Закон Шарля	10
Уравнение политропы	10
1.3 Давление и температура в молекулярно-кинетической теории	10
Поток и плотность потока физической величины	10
Поток вектора	12
Средняя квадратичная скорость движения молекул	13
Упругое столкновение частицы со стенкой	13
Число соударений частиц газа со стенкой	14
Основное уравнение молекулярно-кинетической теории	14
Температура в молекулярно-кинетической теории	15
1.4 Распределения атомов и молекул	15
Функция распределения Максвелла	15
Опыты Штерна и Ламмерта	16
Распределение Больцмана	17
Приложение. Стандартная атмосфера Земли: зависимость давления, плотности и температуры от высоты над уровнем моря.....	18
Примеры решения задач	19

1.1 Термодинамика. Введение.

При изучении какого-либо явления или явлений выделяется некоторая совокупность объектов для его рассмотрения. Эта совокупность может быть произвольной (например, атомы или молекулы вещества, тело или группа тел и т.д.) и называется *системой*. Рассмотрение тепловых явлений облегчается тем, что в этих процессах участвуют тела, число атомов или молекул которых огромно. При этом основные закономерности явлений можно описать на основе *молекулярно-кинетической теории*, т.е. предположения о том, что движение атомов или молекул происходит в соответствии с уравнениями механики Ньютона. *Термодинамика* представляет собой теорию тепловых явлений, в которой не учитывается конкретное молекулярное строение тел. Системы, рассматриваемые в термодинамике, называются *термодинамическими системами*.

Три основные положения термодинамики. В основе молекулярно-кинетической теории строения вещества лежат *три основных положения*:

- 1) вещество состоит из частиц (атомов или молекул)
- 2) эти частицы участвуют в непрерывном хаотическом движении
- 3) частицы взаимодействуют друг с другом

Остановимся подробнее на каждом из этих положений. Оценим сначала величины, характеризующие атомы и молекулы веществ.

Примерные характеристики атомов и молекул. Концентрация.

Согласно молекулярно-кинетической теории давление газа определяется выражением (1.9). Из него следует, что концентрация молекул газа при обычных условиях примерно равна числу Лошмидта (1.6), т.е. число молекул примерно равно $3 \cdot 10^{19}$ в кубическом сантиметре (см^{-3}). Плотности твердых и жидких веществ примерно в тысячу раз больше плотностей газов при обычных условиях (например, плотность воды составляет 1 г/см^3), поэтому в них концентрация атомов и молекул примерно в тысячу раз больше по сравнению с концентрацией их в газе, т.е. в 1 см^3 составляет примерно

$$N \approx 3 \cdot 10^{22} \text{ молекул или атомов}$$

Размеры. Твердые тела и жидкости очень трудно сжать. В них расстояния между атомами и молекулами порядка размеров их самих. Зная их число в 1 см^3 можно оценить их размер a .

$$a = 1/\sqrt[3]{N} \approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$$

Масса. Соответственно, зная число атомов и молекул в 1 г вещества можно оценить их массу

$$m = 1/N \approx 3 \cdot 10^{-23} \text{ г}$$

Количество вещества ν дает представление о том, какое количество атомов или молекул имеет система. Измеряется количество вещества в молях. *Моль* – количество вещества, содержащее столько же молекул, сколько содержится атомов в 12 г углерода. Таким образом, *количество вещества* есть

отношение числа атомов или молекул рассматриваемой системы к числу атомов, содержащихся в 12 г углерода. Чем вызван выбор именно углерода для измерения количества вещества? В этом случае облегчается нахождение молярной массы вещества (см. далее).

Число Авогадро. Итак, число частиц, содержащихся в одном моле любого вещества одинаково. Это число называется *числом Авогадро*. Оно равно

$$N_A = 6.023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

Молярная масса m . Масса одного моля вещества называется *молярной массой*. Следовательно,

$$\mu = mN_A$$

где m – масса атома или молекулы рассматриваемого вещества. Если в качестве эталона массы выбрать 1/12 массы атома углерода изотопа 12, то облегчается нахождение μ . В этом случае, если вещество состоит из атомов, то следует брать атомное число элемента (если вещество состоит из молекул, то следует брать сумму атомных чисел элементов, входящих в молекулу) и приписать к нему размерность молярной массы г/моль. Так, например, молярная масса углерода $\mu_C = 12$ г/моль, молекулярного водорода (H_2) – $\mu_{H_2} = 2$ г/моль, молекулярного кислорода (O_2) – $\mu_{O_2} = 32$ г/моль, молекулярного азота (N_2) – $\mu_{N_2} = 28$ г/моль, углекислого газа (CO_2) – $\mu_{CO_2} = 44$ г/моль, и т.д. Молярная масса воздуха принимается равной $\mu_{\text{возд}} = 29$ г/моль.

Масса произвольного количества вещества M , таким образом, выражается

$$M = \rho V = mnV = mN = m\nu N_A = \mu\nu$$

где ρ – плотность вещества, V – объем вещества, n – концентрация атомов или молекул вещества, N – число атомов или молекул вещества.

Броуновское движение. Хаотичность движения атомов и молекул проявляется, например, в *броуновском движении* частиц. Движение названо в честь английского ботаника Р. Броуна, впервые (1827) наблюдавшего это явление. Суть данного явления в том, что движение достаточно больших по сравнению с размерами атомов и молекул частиц (Р. Броун наблюдал в микроскоп взвесь цветочной пыльцы (споры плауна) в воде, размеры частиц составляли 5-6 10^{-2} мм) является хаотичным. Подобные опыты были повторены многократно и на самых различных мельчайших частичках (в том числе неорганических).

Макроскопические тела подвержены столкновениям огромного числа окружающих их атомов или молекул, поэтому в среднем число ударов за единицу времени в противоположных направлениях одинаково и такие тела находятся в состоянии покоя. При уменьшении размеров тел удары атомов и молекул уже не уравнивают друг друга, тело начинает двигаться, его направление определяется некомпенсированными ударами атомов и молекул. Это направление, в силу хаотичности движения последних, случайно, вследствие чего, например, маленькие частицы случайным образом блуждают по жидкости.

Взаимодействие атомов и молекул обычно характеризуется зависимостью *потенциальной энергии взаимодействия* от расстояния между ними, характерный вид которой представлен на рис. 1.1. Крутизна наклона данной кривой говорит о силе взаимодействия, чем больше крутизна – тем больше сила. Если наклон кривой положителен, то имеет место притяжение, если отрицателен – отталкивание. На больших расстояниях друг от друга атомы и молекулы, как правило, притягиваются, на малых – отталкиваются. Начиная с некоторого расстояния между атомами, дальнейшее его уменьшение приводит к резкому увеличению силы отталкивания – атомы как бы не хотят проникать друг в друга. Это расстояние примерно соответствует размерам атомов.

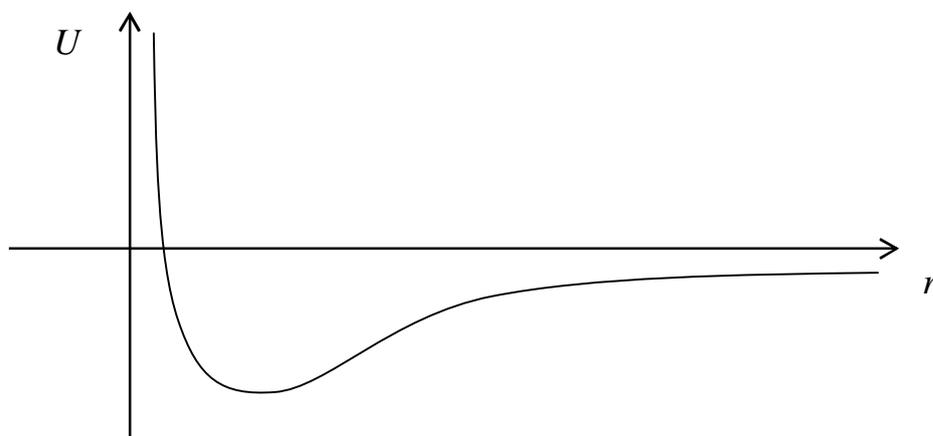


Рис. 1.1

Термодинамические параметры. Физические величины, характеризующие состояние системы, называются *термодинамическими параметрами*. Среди них особое место занимают температура, давление и объем. *Температура* характеризует внутреннее (тепловое) состояние системы, *объем* – пространственную протяженность системы, *давление* – интенсивность воздействия тела или среды на поверхность другого тела. Законы физики устанавливают связи между физическими величинами или изменениями физических величин. Под *абсолютным изменением* (или просто изменением) физической величины X понимается разность значений этой величины в конечном (1) и начальном (0) состояниях

$$\Delta X = X_1 - X_0$$

под *относительным* – отношение абсолютного изменения к начальному значению этой величины $\Delta X/X_0$.

Тепловое равновесие. Любое вещество, тело или их совокупность (*система*), в частности, газ может находиться в различных состояниях. При неизменных внешних условиях система с течением времени переходит в состояние, в котором термодинамические параметры не меняются и остаются постоянными сколь угодно долго. Такие состояния называются состояниями *теплового (термодинамического) равновесия*.

1.2 Газовые законы

Закон Бойля-Мариотта. При неизменной температуре, давление и объем газа одного и того же количества вещества подчиняется соотношению

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

Эта запись означает, что если мы возьмем газ в некотором состоянии 1, переведем его в некоторое состояние 2, температура которого совпадает с температурой газа в состоянии 1, то произведение давления газа на занимаемый им объем не зависит от конкретного состояния, в котором находится газ, т.е. постоянно. Другой вид записи этого соотношения имеет вид

$$pV = \text{const} \quad (1.1)$$

(constant – постоянная). Данное соотношение установлено экспериментально (1660). Процесс, при котором температура системы остается постоянной, а меняются ее объем и давление, называется *изотермическим*. Соответственно, кривая, графически изображающая данный процесс, называется *изотермой*. Графики, изображающие поведение термодинамических параметров в каких-либо процессах, часто также называются *диаграммами*. Название диаграммы (p - V , V - T , p - T) соответствует осям представляемого графика. Например, изотермы на p - V диаграмме представляются гиперболами (рис. 1.2).

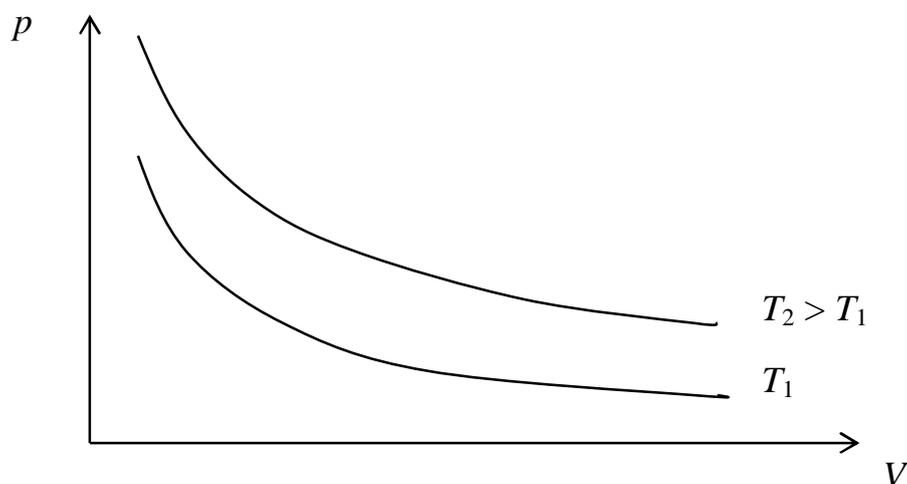


Рис. 1.2

Закон Гей-Люссака. Пусть при начальной температуре газа $t = 0$ °С его объем равен V_0 . Тогда относительное изменение объема и абсолютное изменение температуры одного и того же количества вещества газа подчиняются соотношению

$$\Delta V/V_0 = \alpha \Delta t \quad (1.2)$$

Данное соотношение установлено экспериментально (1802), коэффициент пропорциональности между относительным изменением объема и абсолютным

изменением температуры называется *термическим коэффициентом объемного расширения*

$$\alpha = 1/273.15 \text{ град}^{-1}.$$

Процесс, при котором давление системы остается постоянным, а меняются ее объем и температура, называется *изобарическим* или *изобарным*.

Соответственно, кривая, изображающая данный процесс, называется *изобарой*.

Изобразим различные изобары на графиках зависимости $V(t)$. Для этого перепишем соотношение (1.2) в виде

$$V(t) = V_0(1 + \alpha t) \quad (1.3)$$

Данная функция является линейной по t и представляется на графике прямой линией (рис. 1.3). В формуле (1.3) второй множитель не зависит от давления и обращается в ноль при одном и том же значении $t_{\text{ан}}$ равном

$$t_{\text{ан}} = -1/\alpha = -273.15 \text{ }^\circ\text{C} \quad (1.4)$$

Таким образом, все изобары пересекаются в точке с координатами $(-273.15; 0)$ на графиках зависимости $V(t)$, т.е. при температуре $t_{\text{ан}}$ объем газа становится равным нулю.

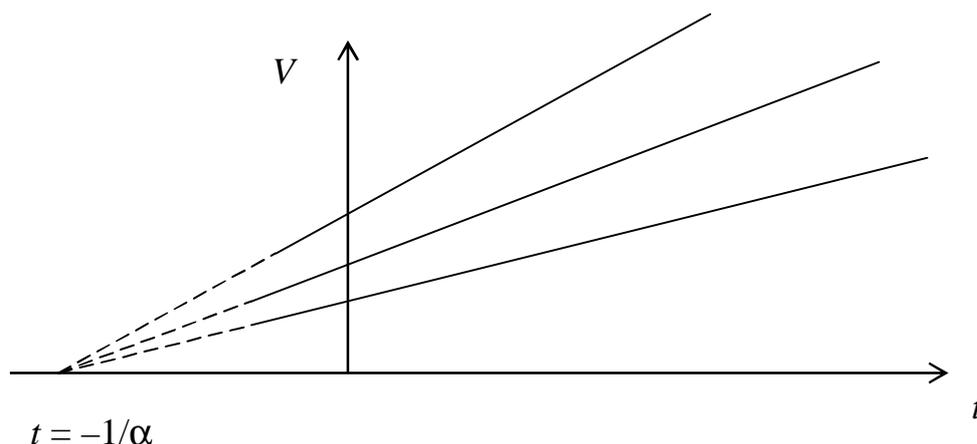


Рис. 1.3

Идеальный газ. В действительности объем газа не может быть равен нулю, т.к. частицы газа имеют хотя и малый, но все же конечный объем (см. п. 1.1). Кроме того, при сильном охлаждении газы превращаются в жидкости или твердые тела, к которым газовые законы уже не применимы. Реальные газы подчиняются газовым законам лишь приближенно. Газ, который в точности подчинялся бы газовым законам, называется *идеальным*. Из этого, однако, не следует, что идеальный газ является чисто абстрактным понятием. Чем ниже плотность газа и чем выше его температура, тем ближе поведение реального и идеального газов.

Абсолютная температура. Предельную температуру (1.4), при которой объем идеального газа становится равным нулю, выбирают за *абсолютный нуль температуры*.

Английский физик Кельвин ввел абсолютную шкалу температур. В этой шкале абсолютный нуль температуры принимается за нуль по *шкале Кельвина*.

Изменение температуры на один градус по шкале Кельвина соответствует изменению температуры на один градус по шкале Цельсия

$$T (\text{К}) = t + 1/\alpha \approx t(^{\circ}\text{C}) + 273^{\circ}\text{C}$$

Множитель при V_0 в выражении (1.3) теперь будет равен

$$1 + \alpha t = 1 + \alpha(T - 1/\alpha) = \alpha T$$

и выражение (1.3) можно переписать в виде

$$V/T = \text{const} \quad (1.5)$$

или

$$V_1/T_1 = V_2/T_2$$

где 1 и 2 – произвольные состояния, соответствующие одному и тому же давлению газа.

Приведем для справки также связь градусов различных наиболее распространенных температурных шкал

$$\begin{array}{lclclclclcl} t = t & = T - 273.15 & = 5/9(f - 32) & = 5/9F - 273.15 & = 5/4r \\ T = t + 273.15 & = T & = 5/9f + 255.37 & = 5/9F & = 5/4r + 273.15 \\ f = 9/5t + 32 & = 9/5T - 459.67 & = f & = F - 459.67 & = 9/4r + 32 \\ F = 9/5t + 491.67 & = 9/5T & = f + 495.67 & = F & = 9/4r + 491.67 \\ r = 4/5t & = 4/5(T - 273.15) & = 4/9(f - 32) & = 4/9F - 218.52 & = r \end{array}$$

где t – температура в градусах *Цельсия* ($^{\circ}\text{C}$), T – в градусах *Кельвина* (К), f – в градусах *Фаренгейта* ($^{\circ}\text{F}$), F – в градусах *Ренкин* ($^{\circ}\text{Ra}$), r – в градусах *Реомюра* ($^{\circ}\text{R}$).

Закон Авогадро. В результате химических исследований в начале XIX века выяснилось, что объемы химически прореагировавших газов находятся в простых соотношениях. Это привело Авогадро к гипотезе (1811) о том, что в равных объемах газов при одинаковых температурах и давлениях содержится одинаковое число молекул. Данное утверждение было позже доказано (см., например, (1.9)) и сейчас оно носит название *закона Авогадро*.

Согласно этому закону при одинаковых температурах и давлениях один моль любого газа должен занимать один и тот же объем. При *нормальных условиях* ($t = 0^{\circ}\text{C}$, $p = 101\,325$ Па) один моль газа занимает объем 22.4 литра

$$V_{\text{оц}} = 22.4 \text{ л/моль}$$

Этот объем называется *молярным*.

В одном кубическом сантиметре газа при нормальных условиях содержится

$$L = 2.69 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3} \quad (1.6)$$

атомов или молекул. Данное число называется *числом Лошмидта*.

Уравнение состояния идеального газа. В законах Бойля-Мариотта и Гей-Люссака имеется связь двух термодинамических параметров при фиксированном третьем.

Как в произвольном случае связаны термодинамические параметры p_1 , V_1 , T_1 состояния 1 с термодинамическими параметрами p_2 , V_2 , T_2 состояния 2 (рис. 1.4), если масса газа в состояниях 1 и 2 одинакова? Переведем газ сначала по

изотерме в состояние 3, а потом по изобаре в состояние 2. Давления и объемы в первом случае согласно закону Бойля-Мариотта связаны соотношением (1.1)

$$p_1 V_1 = p_2 V_3$$

Во втором случае температуры и объемы согласно закону Гей-Люссака связаны соотношением (1.5)

$$V_3/T_1 = V_2/T_2$$

Выразим из последнего соотношения V_3 и подставим в предыдущее, получим

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

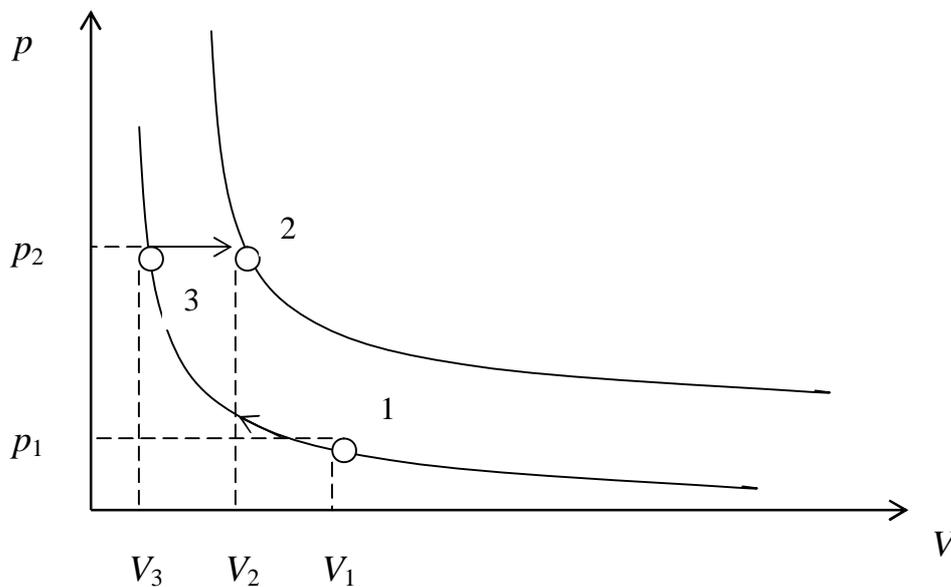


Рис. 1.4

или
$$\frac{pV}{T} = const \quad (1.7)$$

Данное уравнение называется *уравнением Клапейрона*. При нормальных условиях для одного моля газа константа в данном уравнении равна

$$R = 8.31 \text{ Дж/(град моль)}$$

и называется *универсальной газовой постоянной*. Следовательно, и в других условиях давление, температура и объем V_μ одного моля газа также будут связаны этим соотношением

$$pV_\mu = RT \quad (1.8)$$

При выводе данного соотношения использовался весьма специфический переход из состояния 1 в состояние 2, который позволил использовать нам законы Бойля-Мариотта и Гей-Люссака. Термодинамически равновесные состояния характеризуются постоянством значений термодинамических параметров, причем не важно каким образом эти состояния получены. Поэтому связь (1.8) справедлива и в общем случае.

Умножим левую и правую части уравнения (1.8) на концентрацию атомов или молекул газа. Произведение концентрации на объем одного моля газа равен числу содержащихся в том объеме частиц, т.е. числу Авогадро $N_A = nV_\mu$, следовательно

$$p = nkT \quad (1.9)$$

где постоянная k равна

$$k = R/N_A \quad (1.10)$$

и называется *постоянной Больцмана*. Умножим теперь левую и правую части уравнения (1.8) на число молей рассматриваемого газа. Произведение числа молей газа на объем одного моля равно объему газа $V = \nu V_\mu$, в правой части число молей можно записать как $\nu = m/\mu$, где m – масса, μ – молярная масса газа, тогда получим

$$pV = nRT = \frac{m}{\mu} RT \quad (1.11)$$

Данное уравнение называется *уравнением Менделеева-Клапейрона*.

Закон Шарля. При неизменном объеме, давление и температура одного и того же количества вещества подчиняется соотношению

$$p_1/T_1 = p_2/T_2$$

Другой вид записи этого соотношения имеет вид

$$p/T = \text{const} \quad (1.12)$$

Данное соотношение установлено экспериментально (1787). Процесс, при котором объем системы остается постоянным, а меняются давление и температура, называется *изохорическим* или *изохорным*. Соответственно, кривая, изображающая данный процесс, называется *изохорой*. Заметим, что закон Шарля можно получить из уравнения Менделеева-Клапейрона (1.11), если зафиксировать в нем объем.

Уравнение политропы. Часто при моделировании различных процессов удобно использовать приближенные зависимости давления от объема. Одной из таких зависимостей является

$$pV^n = \text{const} \quad (1.13)$$

Данное уравнение называется *уравнением политропы*, n – *показателем политропы*. Так, при $n = 1$ уравнение политропы представляет собой закон Бойля-Мариотта (1.1), а при $n = \gamma$ (постоянная адиабаты) – уравнение адиабаты (см. часть 2 пособия). В *политропических процессах* теплоемкость тела остается постоянной.

1.3 Давление и температура в молекулярно-кинетической теории

Поток и плотность потока физической величины. Пусть все атомы или молекулы вещества двигаются с одной и той же скоростью v . Зададимся вопросом, какое их количество пройдет за время Δt через воображаемую площадку площадью S , расположенную перпендикулярно движению частиц (рис. 1.5)? Очевидно, что за время Δt через эту площадку пройдут все атомы

или молекулы, находящиеся в заштрихованной области, объем которой составляет

$$V = Sv\Delta t$$

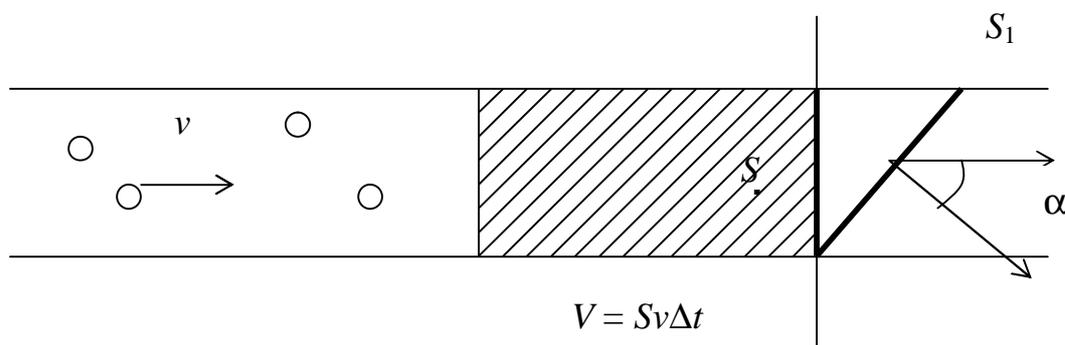


Рис. 1.5

Следовательно, за это время через площадку пройдет

$$N = nV = nSv\Delta t$$

атомов или молекул, n – их плотность. Число частиц, проходящих через площадку в единицу времени

$$\Phi = N/\Delta t = nvS = jS \quad (1.14)$$

называется *поток* частиц (вещества). Число частиц, проходящих через единичную площадку в единицу времени

$$j = \Phi/S = nv \quad (1.15)$$

называется *плотностью потока частиц* (вещества).

Совершенно аналогично вводятся потоки и плотности потоков различных физических величин, ниже приведем наиболее распространенные из них, которые понадобятся нам в дальнейшем:

$$\begin{aligned} \Phi_m &= mnvS = \rho vS \\ j_m &= mnv = \rho v \end{aligned} \quad (1.16)$$

– *поток и плотность потока массы*, здесь m , ρ – соответственно масса одной частицы и плотность вещества,

$$\begin{aligned} \Phi_E &= EnvS = wvS \\ j_E &= Env = wv \end{aligned} \quad (1.17)$$

– *поток и плотность потока энергии*, здесь E , w – соответственно энергия одной частицы и плотность энергии вещества,

$$\begin{aligned} \Phi_q &= qnvS = \rho_q vS \\ j_q &= qnv = \rho_q v \end{aligned} \quad (1.18)$$

– *поток заряда и плотность потока заряда (плотность электрического тока или просто плотность тока)*, здесь q , ρ_q – соответственно заряд одной частицы и плотность заряда вещества.

Что будет, если площадка будет расположена не перпендикулярно движению частиц, а произвольным образом (см. площадку S_1 на рис. 1.5)? Разумеется, что через нее за время Δt пройдет такое же количество частиц,

какое пройдет за это же время через площадку площадью S , расположенную перпендикулярно движению частиц. С учетом того, площади этих площадок связаны соотношением

$$S = S_1 \cos \alpha$$

Мы можем переписать выражение для потока (1.14) следующим образом

$$\Phi = jS = jS_1 \cos \alpha$$

Скалярное произведение произвольных векторов \vec{a} и \vec{b} определяется как

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$$

где α – угол между данными векторами, поэтому выражение для потока можно записать через скалярное произведение векторов. Введем вектора плотности потока частиц \vec{j} и площадки \vec{S} . Пусть направление вектора \vec{j} будет совпадать с направлением скорости частиц

$$\vec{j} = n\vec{v} \tag{1.19}$$

а его модуль с $j = nv$, соответственно, пусть направление вектора \vec{S} будет совпадать с направлением, задаваемым вектором нормали к площадке S (рис. 1.5), а его модуль с площадью этой площадки. Тогда выражение (1.14) для потока частиц можно переписать в виде

$$\Phi = \vec{j} \cdot \vec{S} \tag{1.20}$$

Подобным образом можно переписать через скалярные произведения векторов и потоки других введенных выше величин.

Поток вектора. Данный подход к понятию потока как к скалярному произведению векторов обобщается в теории векторных полей. Далее он нам также понадобится при рассмотрении электродинамики, поэтому мы сделаем здесь небольшое отступление.

Если каждой точке X некоторой области пространства ставится в соответствие по известному закону некоторый вектор $\vec{B}(X)$, то говорят, что в этой области задано *векторное поле*. Если векторное поле не зависит от конкретной точки данной области, то говорят, что в данной области векторное поле *однородно*. Пусть площадка S находится в однородном векторном поле \vec{B} , тогда величина

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} \tag{1.21}$$

называется *поток вектора* \vec{B} через площадку S . Таким образом, поток частиц – это поток вектора \vec{j} через площадку S .

Реально же редко встречается ситуация, когда площадка плоская, а поле однородно. В этом случае произвольная поверхность разбивается на маленькие участки ΔS_i так, что каждый участок можно считать плоским, при этом в силу его малости можно считать, что векторное поле в пределах данного участка является однородным и равным \vec{B}_i . Малые площадки выбираются произвольным образом, но таким, что их объединение совпадает с исходной поверхностью, при этом никакие из них не пересекаются. Тогда предел суммы

$$\sum_i \dot{\mathbf{B}}_i \Delta \dot{\mathbf{S}}_i$$

при стремлении максимальной из площадок ΔS_i к нулю называется *поток* векторного поля (*поток* вектора) через поверхность S и обозначается

$$\Phi_{B,S} = \int \dot{\mathbf{B}} d\dot{\mathbf{S}} \quad (1.22)$$

Среднеквадратичная скорость движения молекул. Среднее значение квадрата скорости атомов или молекул есть среднее арифметическое от значений квадрата скорости всех атомов или молекул системы

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n} = \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2}{n} \quad (1.23)$$

где v_i^2 – квадрат скорости i -ого атома или молекулы, n – полное число атомов или молекул системы. В силу теоремы Пифагора квадрат скорости каждой из частиц можно выразить через сумму квадратов проекций этой скорости на три взаимно перпендикулярные направления x , y и z :

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Для каждой из проекций скоростей справедливо соотношение, аналогичное (1.23). Поэтому

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$$

Направления x , y и z равноправны

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$$

следовательно

$$\langle v^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle = 3\langle v_y^2 \rangle = 3\langle v_z^2 \rangle \quad (1.24)$$

Корень квадратный из среднего квадрата скорости называется *средней квадратичной скоростью*

$$v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} \quad (1.25)$$

Упругое столкновение частицы со стенкой. При упругом столкновении частицы со стенкой угол ее падения на стенку (рис. 1.6) равен углу ее отражения от стенки. Следовательно, ее y -ая и z -ая компоненты скорости не меняются

$$v_y = v_{0y}; \quad v_z = v_{0z};$$

Меняется только x -ая компонента, она меняет свой знак

$$v_x = -v_{0x}$$

Таким образом, импульс, передаваемый частицей при ударе об стенку равен удвоенному значению x -ой составляющей импульса частицы, взятому до или после столкновения

$$|\Delta \mathbf{p}| = |\mathbf{p} - \mathbf{p}_0| = |p_x - p_{0x}| = |mv_x - mv_{0x}| = |mv_x - (-mv_x)| = 2m|v_x| \quad (1.26)$$

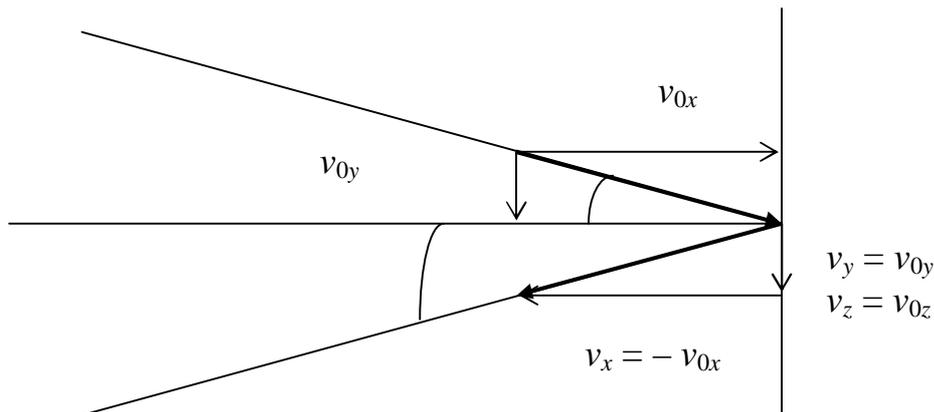


Рис. 1.6

Число соударений частиц газа со стенкой. Выделим на вертикальной стенке воображаемую плоскую фигуру площади S . Перпендикулярное к ней направление пусть совпадает с осью x . Если бы мы вырезали из стенки эту плоскую фигуру, то при движении частиц со скоростью \dot{v} за время Δt через нее прошло бы (1.14), (1.15), (1.20)

$$N = \Phi \Delta t = \dot{j} S \Delta t = j_x S \Delta t$$

частиц. Если же эту фигуру не вырезать, то все частицы, которые ранее пролетали через нее, теперь с ней столкнутся. Следовательно, за время Δt площадка испытает на себе

$$\nu = j_x S \Delta t$$

столкновений. Согласно второму закону Ньютона изменение импульса в единицу времени есть действующая сила $\Delta P / \Delta t = F$. С другой стороны, при каждом столкновении стенке передается импульс (1.26), поэтому полный импульс, передаваемый стенке за время Δt за счет столкновений с ней, равен

$$\Delta P = F \Delta t = 2m \nu_x \nu = 2m \nu_x j_x S \Delta t$$

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории. Последнее выражение справедливо для случая, когда все частицы имеют одну и ту же скорость. В реальном газе частицы имеют разные скорости, поэтому в конечном соотношении (1.27) будет произведено усреднение по скоростям частиц, т.е. под скоростями мы будем подразумевать их среднеквадратичные значения. Заметим также, что в покое газе в произвольном направлении в среднем движется половина частиц (другая половина движется в противоположном направлении), поэтому при вычислении давления газа для j нужно брать соотношение (1.14, 1.15), не с n , а с $n/2$:

$$F \Delta t = m n \nu_x^2 S \Delta t$$

Сокращая теперь левую и правую части данного соотношения на Δt , усредняя его по скоростям частиц и используя соотношение (1.24) получаем

$$\langle F \rangle = \frac{1}{3} mn \langle v^2 \rangle S$$

Средняя сила, действующая на единичную площадь – это давление, таким образом

$$p = \frac{\langle F \rangle}{S} = \frac{1}{3} mn \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} n \langle E_{\text{кин}} \rangle \quad (1.27)$$

Данное соотношение называется *основным уравнением молекулярно-кинетической теории*. В последнем равенстве использовано выражение для кинетической энергии поступательного движения частицы

$$E_{\text{кин}} = mv^2/2 \quad (1.28)$$

Температура в молекулярно-кинетической теории. Умножим уравнение (1.27) на объем одного моля V_μ , тогда с учетом того, что $nV_\mu = N_A$, получим

$$pV_\mu = \frac{2}{3} N_A \langle E_{\text{кин}} \rangle$$

Из сравнения с (1.8) получаем с учетом (1.10)

$$\langle E_{\text{кин}} \rangle = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} kT \quad (1.29)$$

При подстановке данного соотношения в соотношение (1.27) получаем уже известное соотношение (1.9).

Итак, согласно (1.29) температура характеризует среднюю кинетическую энергию поступательного движения атомов и молекул, другими словами температура – это своеобразная мера интенсивности движения атомов и молекул.

1.4 Распределения атомов и молекул

Согласно формулам (1.25), (1.28), (1.29) имеем

$$v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Для молекул водорода при температуре $T = 300$ К эта скорость оказывается примерно равной 2 км/с, для молекул воздуха (смеси молекул азота и кислорода) – 0.5 км/с, т.е. характерная средняя квадратичная скорость атомов и молекул газов оказывается порядка км/с. Данная формула не дает ответа на вопрос о том, как распределены атомы и молекулы по скоростям.

Функция распределения Максвелла. Оказывается, что атомы и молекулы в термодинамически равновесном состоянии могут иметь любые скорости – от очень малых до очень больших. Конкретный ответ на вопрос о том, сколько атомов или молекул газа имеют те или иные скорости дает *функция распределения Максвелла (1860)* – функция распределения атомов или молекул по скоростям. Эта функция имеет следующий вид

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 \quad (1.30)$$

здесь e – число, примерно равное 2.71, m – масса, v – скорость атомов или молекул газа, k – постоянная Больцмана, T – температура газа. Данное выражение означает, что при достаточно малом Δv число атомов или молекул газа с модулем скорости от v до $v+\Delta v$ равно $NF(v)\Delta v$, где N – полное число атомов или молекул газа. Чем меньше Δv и чем больше N , тем точнее это выражение. Качественный вид данной функции представлен на рис. 1.7.



Рис. 1.7

Опыты Штерна и Ламмерта. Вид распределения (1.30) был подтвержден в различных экспериментах.

В опыте Штерна (1920) использовались два соосных цилиндра (рис. 1.8). На оси располагалась нагреваемая платиновая нить, покрытая слоем серебра. Если цилиндры не приводились во вращение, то испаряемые атомы осаждались в виде узкой полоски В, находящейся непосредственно напротив щели А. Если цилиндры приводились во вращение с одинаковой угловой скоростью, то место осаждения атомов на внутренней поверхности внешнего цилиндра зависело от скорости, с которой они выходили из точки А. По скорости вращения цилиндров и скорости атомов можно рассчитать их конкретное место осаждения С, т.е. можно рассчитать профиль осаждаемых атомов.

В опыте Ламмерта (1929) молекулярный пучок пропусклся через два вращающиеся диска с радиальными прорезями, ось вращения которых совпадала. Анализировались молекулы, прошедшие через обе прорези. При фиксированной скорости вращения дисков молекулы могут проходить через обе прорези разнесенных друг от друга дисков только тогда, когда они имеют вполне определенную скорость.

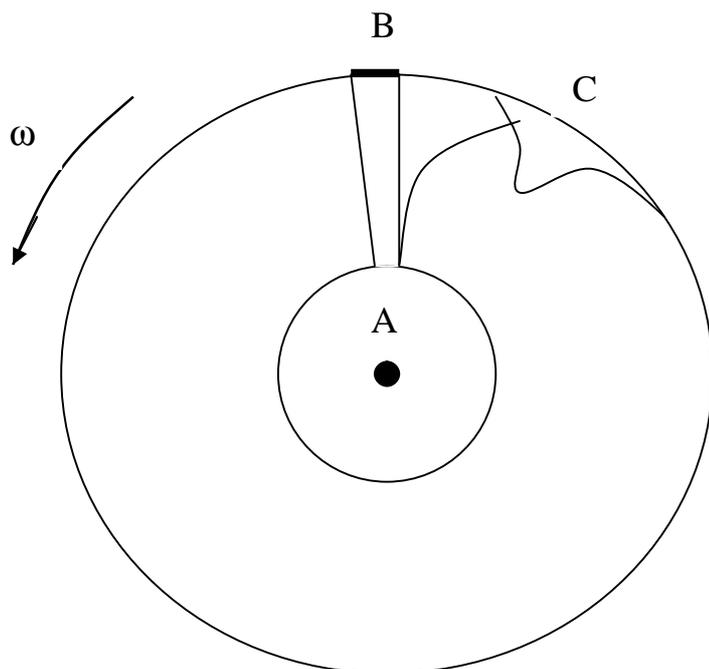


Рис. 1.8

Распределение Больцмана. Если частицы вещества находятся в потенциальном поле, то плотность частиц n в точках пространства с потенциальной энергией U связана с плотностью частиц n_0 в точках пространства с нулевой потенциальной энергией выражением

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}} \quad (1.31)$$

называемым *распределением Больцмана*. В частности, из данного соотношения и соотношения (1.9) следует, что для изотермической атмосферы с температурой T (реальная атмосфера планет не является изотермической, см. приложение) давление p падает с высотой h как

$$p = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} \quad (1.32)$$

где p_0 – давление на поверхности планеты, m – масса атомов или молекул атмосферы. Данное соотношение известно как *барометрическая формула*.

Приложение
**Стандартная атмосфера Земли: зависимость давления,
плотности и температуры от высоты над уровнем моря**

Высота над уровнем моря, м	Давление 10^6 дин/см ²	Плотность 10^{-3} г/см ³	Температура °С
0	1.013	1.226	15.0
500	0.955	1.168	11.7
1000	0.899	1.112	8.5
1500	0.845	1.059	5.2
2000	0.795	1.007	2.0
3000	0.701	0.910	-4.5
4000	0.616	0.820	-11.0
5000	0.540	0.736	-17.5
6000	0.472	0.660	-24.0
8000	0.356	0.525	-37.0
10000	0.264	0.413	-50.0
12000	0.193	0.311	-56.5
14000	0.141	0.227	-56.5
16000	0.103	0.165	-56.5
18000	0.075	0.121	-56.5

Примеры решения задач

1. На сколько изменилось давление кислорода в баллоне емкостью 100 л, если из него откачали 3 кг газа? Температура газа 17 °С оставалась постоянной.

$$\text{Ответ: } \Delta p = p_2 - p_1 = \frac{\Delta m RT}{\mu V} = -2.3 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Решение. Согласно уравнению Менделеева-Клапейрона

$$p_i V_i = \frac{m_i}{\mu} RT_i$$

где $i = 1$ соответствует состоянию до, а $i = 2$ – после откачивания газа. По условию температура и объем кислорода в баллоне не меняются, поэтому вычитая одно уравнение из другого получаем

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{\Delta m RT}{\mu V}$$

где $\mu = 32$ г/моль – молярная масса кислорода.

2. Стеклянная колба объемом 10 см³ с узкой шейкой была нагрета до 114 °С, затем шейку колбы опустили в ртуть. При охлаждении воздуха в колбу вошло 36 г ртути. До какой температуры охладился воздух? Плотность ртути считать равной 13.6 · 10³ кг/м³.

$$\text{Ответ: } T_2 = \frac{(V_1 - m/\rho)}{V_1} T_1 = 2.8 \cdot 10^2 \text{ К.}$$

Решение. Процесс охлаждения воздуха изобарный, т.к. воздух и ртуть находятся под атмосферным давлением. По закону Гей-Люссака $V_1/T_1 = V_2/T_2$, т.е. $T_2 = V_2 T_1 / V_1$. Объем холодного воздуха определяется как разность объемов колбы и ртути, вошедшей в колбу: $V_2 = V_1 - V_p$. Объем ртути $V_p = m/\rho$. Тогда

$$T_2 = \frac{(V_1 - m/\rho)}{V_1} T_1$$

3. Резиновый шар содержит 2 л воздуха, находящегося при температуре 20 °С и атмосферном давлении 10⁵ Па. Какой объем займет воздух, если шар будет опущен в воду на глубину 10 м? Температура воды 4 °С. Давлением, обусловленным кривизной поверхности пренебречь.

$$\text{Ответ: } V_2 = \frac{p_{\text{атм}} V_1 T_2}{(p_{\text{атм}} + \rho gh) T_1} = 9.5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Решение. Пусть до погружения в воду воздух в шаре имел объем V_1 , температуру T_1 , давление p_1 , а после погружения соответственно V_2 , T_2 , p_2 . Поскольку масса воздуха не изменяется, то согласно уравнению Клапейрона

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

На глубине h полное давление равно $p_2 = \rho gh + p_{\text{атм}}$, где $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ – плотность воды. Под таким же давлением будет находиться и воздух в шаре, погруженном на эту глубину. До погружения давление воздуха $p_1 = p_{\text{атм}}$. Подставляя p_1 и p_2 в уравнение Клапейрона, получаем:

$$V_2 = \frac{p_{\text{атм}} V_1 T_2}{(p_{\text{атм}} + \rho gh) T_1}$$

4. В цилиндре, площадь сечения которого равна $S = 100 \text{ см}^2$, находится воздух при температуре $t_1 = 12 \text{ }^\circ\text{C}$. Атмосферное давление $p_1 = 101 \text{ кПа}$. На высоте $h_1 = 60 \text{ см}$ от основания цилиндра расположен поршень. На сколько опустится поршень, если на него поставить гирию массой $m = 100 \text{ кг}$, а воздух в цилиндре при этом нагреть до $t_2 = 27 \text{ }^\circ\text{C}$? Трение поршня о стенки цилиндра и вес самого цилиндра не учитывать.

Ответ: $h_1 - h_2 = h_1 \left(1 - \frac{p_1 T_2}{(p_1 + mg/S) T_1} \right) = 28 \text{ см.}$

Решение. Изменение объема воздуха, находящегося под поршнем, будет происходить вследствие увеличения давления воздуха и изменения его температуры. Состояния воздуха в цилиндре при начальном (1) и конечном (2) положениях поршня связаны уравнением Клапейрона

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

где $p_2 = p_1 + F/S$, F – вес гири. Отношение объемов можно заменить отношением высот

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2}$$

Откуда окончательно следует

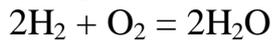
$$\frac{h_1 - h_2}{h_1} = 1 - \frac{h_2}{h_1} = \frac{p_2 T_1 - p_1 T_2}{p_2 T_1}$$

и $h_1 - h_2 = h_1 \left(1 - \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} \right) = h_1 \left(1 - \frac{p_1 T_2}{(p_1 + mg/S) T_1} \right)$

5. В камеру сгорания реактивного двигателя поступает в секунду масса m водорода и необходимое для полного сгорания количество кислорода. Площадь сечения выходного отверстия сопла двигателя S , давление в этом сечении p , абсолютная температура T . Определить силу тяги двигателя.

Ответ: $F \approx m_1 v = \rho v^2 S = \frac{81 m^2 RT}{p S M_{\text{H}}}$

Решение. Найдем массу водяных паров, образующихся при сгорании массы m водорода. Из уравнения реакции горения водорода



видно, что две молекулы водорода соединяются с одной молекулой кислорода. В результате получаются две молекулы водяного пара. Это означает, что для сгорания одного киломоля водорода необходима половина киломоля кислорода и в результате реакции получается один киломоль воды. При сгорании $\nu = m/M_{\text{В}}$ киломолей водорода получится столько же киломолей водяного пара ($M_{\text{В}} = 2$ кг/кмоль). Поэтому при сгорании массы m водорода получается масса m_1 водяного пара

$$m_1 = \nu M_{\text{П}} = 9m$$

($M_{\text{П}} = 18$ кг/кмоль). Эта масса водяных паров вылетает из сопла двигателя за 1 с. Так как площадь выходного сопла двигателя известна, можно найти скорость υ газа, выходящего из сопла. За 1 с из сопла двигателя будет выброшен объем пара $V = \upsilon S$. Если плотность пара равна ρ , то масса этого объема пара будет равна:

$$m_1 = \rho \upsilon S$$

Отсюда

$$\upsilon = m_1 / \rho S = 9m / \rho S$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона

$$pV = \frac{m_1}{M_{\text{П}}} RT$$

находим неизвестную плотность пара

$$\rho = \frac{m_1}{V} = \frac{pM_{\text{П}}}{RT}$$

Т.к. за время Δt из сопла ракеты выбрасывается масса пара $m_1 \Delta t$ с импульсом $m_1 \Delta t \upsilon$, то на газ действует сила

$$\mathbf{F}_1 = \frac{m_1 \Delta t \mathbf{\upsilon}}{\Delta t} = m_1 \mathbf{\upsilon}$$

Такая же по модулю сила, но направленная в противоположную сторону, действует на двигатель. Полная сила, действующая на двигатель (сила тяги двигателя), равна сумме реактивной силы F_1 и силы статического давления $F_2 = pS$, т.е.

$$F = m_1 \upsilon + pS$$

Обычно сопла ракетных двигателей устроены так, что давление p газа, выходящего из сопла, мало. Поэтому второй член в выражении для силы тяги двигателя мал по сравнению с первым и при расчетах им можно пренебречь:

$$F \approx m_1 \upsilon = \rho \upsilon^2 S = \frac{81m^2 RT}{pSM_{\text{П}}}$$

б. Баллон с газом разделен на две части теплоизолирующей перегородкой с малым отверстием (это означает, что молекулы проходят в отверстие только «поодиночке», т.е. макроскопическое движение газа не может возникнуть). По

разные стороны перегородки все время поддерживаются температуры T_1 и T_2 . Определите отношение давлений p_1 и p_2 в различных частях баллона.

Ответ:
$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

Решение. На первый взгляд может показаться, что p_1 и p_2 одинаковы, потому что части баллона сообщаются, а равенство давлений является необходимым условием теплового равновесия. Но в данном случае теплового равновесия нет – наоборот, в разных частях баллона поддерживаются различные температуры. Чтобы состояние системы не изменялось, число молекул газа в каждой из частей баллона также не должно меняться. А для этого должны быть одинаковы количества Z_1 и Z_2 молекул, пролетающих через отверстие в одну и другую сторону за одно и то же время Δt . Величину Z можно записать в виде $Z = \frac{1}{2} n \langle |v_x| \rangle S \Delta t$, где n – концентрация молекул, S – площадь отверстия; ось x направлена нормально к плоскости отверстия.

Воспользовавшись соотношениями $n = \frac{p}{kT}$ и $\langle |v_x| \rangle \propto \langle v \rangle \propto \sqrt{T}$, получаем

$$Z \propto \frac{p}{\sqrt{T}} \quad (\text{здесь не выписаны коэффициенты, одинаковые для } Z_1 \text{ и } Z_2 \text{ и поэтому}$$

не влияющие на ответ). Из условия $Z_1 = Z_2$ получаем $\frac{p_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{p_2}{\sqrt{T_2}}$. Интересно, что

отношение концентраций молекул оказывается при этом обратным отношению давлений: $\frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$, т.е. давление больше в той части баллона, где концентрация молекул меньше.