Общеобразовательная школа №1189 им. И.В. Курчатова

Однородные электрическое и магнитное поля

Составитель: Бойченко А.М.

Пособие по физике, 10 класс
электродинамика, ч. 3
однородные электрическое и магнитное поля

Москва 2010

Оглавление

3.1 Взаимодействие магнитного поля с зарядом

Подобно тому, как электрическое поле можно характеризовать вектором напряженности электрического поля $\vec{E}$, магнитное поле можно характеризовать вектором магнитной индукции $\vec{B}$ (см. пособие по уравнениям Максвелла).

Сила Лоренца. Сила, действующая на заряд q при его движении со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, называется *силой Лоренца*

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}] \tag{3.1}$$

где $[\vec{v}, \vec{B}]$ – векторное произведение.

Модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$$

равен произведению модулей векторов на синус угла между ними

$$c = ab\sin\alpha$$

Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а его направление определяется *правилом правого винта*: при вращении винта в кратчайшем направлении по часовой стрелке от первого вектора ($\vec{a}$) ко второму ($\vec{b}$), направление, в котором он будет ввинчиваться, совпадает с направлением векторного произведения.

Видно, что направление силы Лоренца всегда перпендикулярно скорости движения заряда. Таким образом, сила Лоренца работу не совершает. На любом из элементарных участков траектории работа равна нулю

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = \vec{F}\vec{v}dt = 0 \tag{3.2}$$

где $d\vec{r} = \vec{v}dt$ – элементарное перемещение, $\vec{v}$ – скорость заряда.

При наличии электрического поля полную силу, действующую на заряд

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}] \tag{3.3}$$

часто также называют силой Лоренца.

Ниже рассмотрение будет проводиться для *стационарных* (т.е. не меняющихся во времени) полей.

3.2 Движение заряда в однородном магнитном поле

Скорость заряда параллельна вектору магнитной индукции. Из (3.1) следует, что сила, действующая на заряд, равна нулю, поскольку векторное произведение параллельных векторов равно нулю. В этом случае заряд движется прямолинейно и равномерно также как и в отсутствие магнитного поля.

Скорость заряда перпендикулярна вектору магнитной индукции. В этом случае согласно (3.1) сила, действующая на заряд, будет направлена перпендикулярно магнитной индукции, т.е. движение заряда будет происходить в плоскости (перпендикулярной магнитной индукции). С другой стороны, сила также перпендикулярна скорости, т.е. траекторией движения заряда будет окружность. Радиус окружности можно получить, приравнивая силу Лоренца центробежной силе

$$\frac{mv^2}{R} = qvB \quad \frac{mv^2}{R} = qvB$$

где m – масса движущегося заряда, т.е.

$$R = \frac{mv}{qB} \tag{3.4}$$

Масс-спектрометр. Из данного соотношения видно, что различные ионы будут двигаться в магнитном поле по окружностям различного радиуса. Данное обстоятельство используется для анализа состава плазмы в *масс-спектрометрах* (рис. 3.1). В частности, ионы одних и тех же элементов с различными массами (*изотопы*) будут двигаться по разным траекториям, поэтому масс-спектрометры можно использовать также для разделения изотопов.

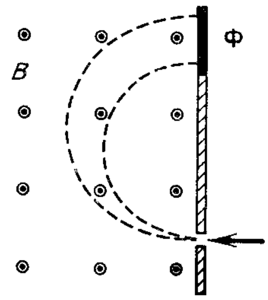


рис. 3.1

Циклотронная частота. Период движения заряда по окружности радиуса R со скоростью по модулю, равной v, составляет

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \tag{3.5}$$

следовательно, частота вращения заряда равна

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$$

Циклическая (или *круговая*) частота, соответствующая данной частоте

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{qB}{m} \tag{3.6}$$

называется *циклотронной частотой*.

Циклотрон. Независимость периода вращения заряда от его скорости используется в ускорителях частиц, называемых *циклотронами*. Циклотрон состоит из двух *дуант*, внутри которых создается однородное магнитное поле. В небольшом промежутке между дуантами создается электрическое поле, полярность которого переключается с циклотронной частотой. Заряженная частица ускоряется в электрическом поле, разворачивается в одной из дуант (не меняя абсолютного значения скорости (3.2)), далее опять ускоряется между дуантами и т.д. Предельная скорость, набираемая частицей в циклотроне, определяется соотношением (3.4). Отметим, что (3.5), (3.6) верны для нерелятивистских частиц, скорости которых много меньше скорости света. Для получения релятивистских скоростей, скорость переключения полярности должна согласовываться с набираемой скоростью частицы (см. пособие по специальной теории относительности).

Общий случай. В общем случае разложим скорость движения частицы на компоненты перпендикулярные и параллельные магнитной индукции

$$\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$$

Поскольку векторное произведение параллельных векторов равно нулю, то в (3.1) ненулевой вклад даст только первое слагаемое. Получаем, что движение заряда представляет собой наложение равномерного и прямолинейного движения заряда вдоль вектора магнитной индукции со скоростью $\vec{v}_\parallel$ и движения по окружности радиуса $R = \frac{mv_\perp}{qB}$ с циклотронной частотой в перпендикулярном вектору магнитной индукции направлении (винтовую линию). Шаг винтовой линии равен $l = v_\parallel T = \frac{2\pi m v_\parallel}{qB}$.

3.3 Движение заряда в однородном электрическом поле

Сила, действующая на заряд в электрическом поле, связана с напряженностью электрического поля соотношением (1.4), поэтому в однородном электрическом поле ускорение заряда постоянно

$$\vec{a}(t) = \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

соответственно, при равноускоренном движении имеем

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \qquad (3.7)$$

где $\vec{r}_0$ – радиус-вектор заряда, $\vec{v}_0$ – скорость заряда в начальный момент времени.

3.4 Движение заряда в перпендикулярных друг другу однородных электрическом и магнитном полях.

Уравнение гармонических колебаний. Уравнением гармонических колебаний называется уравнение вида (см. пособия по колебаниям)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (3.8)$$

где точка означает производную о времени (соответственно, двумя точками обозначена вторая производная по времени). Непосредственной проверкой убеждаемся, что общее решение данного уравнения представляет собой выражение вида

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad (3.9)$$

где A, α – произвольные константы, определяемые начальными условиями. Действительно

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \alpha)$$

В соотношении (3.9) A называется амплитудой колебаний

$\omega = 2\pi\nu$ – циклической (круговой) частотой колебаний

$(\omega t + \alpha)$ – фазой колебаний

α – начальной фазой колебаний

Период колебаний, т.е. время, через которое движение будет повторяться, связан с частотой колебаний соотношением

$$T = 1/\nu = 2\pi/\omega$$

Функции синус и косинус сдвинуты друг относительно друга по фазе на $\pi/2$, поэтому соотношение (3.9) можно переписать в виде

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha + \pi/2) = A\sin(\omega t + \beta) \qquad (3.9a)$$

Уравнения движения. Согласно (3.3) уравнение движения заряда q в скрещенных электрическом $\vec{E}$ и магнитном $\vec{B}$ полях (рис. 3.2) имеет вид

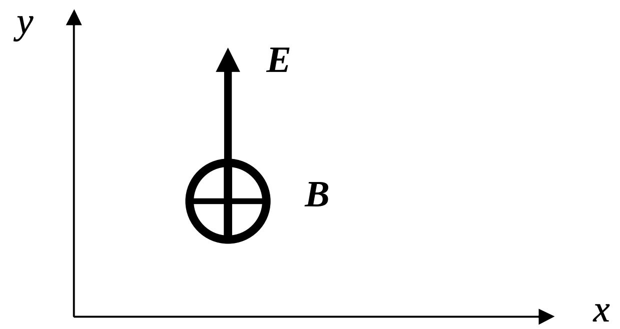


рис. 3.2

$$m\vec{w} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}] \qquad (3.10)$$

где $\vec{w}$ – ускорение, $\vec{v}$ – скорость, m – масса заряда. Если начальная скорость заряда лежит в плоскости xy (рис. 3.2), то нетрудно заметить, что движение будет происходить также в этой плоскости. Распишем уравнение (3.10) по координатам, учитывая что

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$$

$$\vec{E} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор заряда, $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ – орты осей x и y, точки над координатами радиус-вектора x и y как и ранее означают дифференцирование по времени. Получаем

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \eta E_x - \eta B\dot{y} \\ \ddot{y} &= \eta E_y + \eta B\dot{x} \end{aligned} \qquad (3.11)$$

С помощью обозначений

$$\eta = \frac{q}{m}, \qquad f_x = \eta E_x, \quad f_y = \eta E_y, \quad \omega = \eta B$$

перепишем уравнения (3.11) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega\dot{y} &= f_x \\ \ddot{y} - \omega\dot{x} &= f_y \end{aligned} \tag{3.12}$$

Интеграл движения при $f_x = 0$. Из первого уравнения данной системы получаем после интегрирования

$$v_x = v_0 - \omega y \tag{3.13}$$

где v_x – x-ая компонента скорости, а v_0 – аналогичная компонента скорости, соответствующая координате $y = 0$.

Решение уравнений движения. Дифференцируем первое из уравнений (3.12) по времени, учитывая, что f_x – постоянная величина, подставляя в получившееся соотношение $\ddot{y}$ из второго уравнения (3.12), получаем

$$\dddot{x} + \omega\ddot{y} = \dddot{x} + \omega^2\dot{x} + \omega f_y = 0$$

Видно, что мы получили уравнение колебаний для величины $\dot{x} + f_y/\omega$. Согласно (3.9а) его решение имеет вид

$$\dot{x} = -\frac{f_y}{\omega} - \tilde{r}_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

интегрируя данное соотношение по времени, получаем

$$x(t) = x_0 - \frac{f_y}{\omega}t + r_0\cos(\omega t + \varphi_0)$$

где $\tilde{r}_0 = \omega r_0$. Из первого уравнения (3.12) получаем

$$\dot{y} = \frac{f_x}{\omega} - \frac{\ddot{x}}{\omega} = \frac{f_x}{\omega} + \tilde{r}_0\cos(\omega t + \varphi_0)$$

и после интегрирования по времени

$$y(t) = y_0 + \frac{f_x}{\omega}t + r_0\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Итак, окончательно имеем решение уравнений (3.12)

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 - \frac{f_y}{\omega}t + r_0\cos(\omega t + \varphi_0) \\ y(t) &= y_0 + \frac{f_x}{\omega}t + r_0\sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned} \tag{3.14}$$

где x_0, y_0, r_0, φ_0 – произвольные постоянные (постоянные интегрирования), которые определяются из начальных условий. Видно, что решение представляет собой наложение двух движений: равномерного движения вдоль осей x и y и равномерного вращения по окружности радиуса r_0.

Частный случай 1. Отсутствие электрического поля. Положим $f_x = f_y = 0$. Из (3.14) получаем

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + r_0\cos(\omega t + \varphi_0) \\ y(t) &= y_0 + r_0\sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Данное решение соответствует равномерному вращению по окружности (радиуса r_0 с центром (x_0, y_0)), что и должно быть в соответствии с (3.4).

Частный случай 2. Пусть x-я компонента электрического поля отсутствует $E = E_y$ (это можно реализовать поворотом осей xy вокруг начала координат), а начальная скорость движения заряда имеет координаты $\vec{v}_0(-u,0)$, где $u = \dfrac{\eta E}{\omega}$. Тогда из (3.14) следует, что $r_0 = 0$ и

$$x(t) = x_0 - \frac{f_y}{\omega}t = x_0 - ut \qquad (3.16)$$
$$y(t) = y_0$$

т.е. движение заряда представляет собой равномерное движение вдоль оси x.

Частный случай 3. Пусть x-я компонента электрического поля отсутствует, $E = E_y$, а начальная скорость движения заряда равна нулю $\vec{v}(0,0)$. Тогда из (3.14) следует, что $r_0 = \dfrac{u}{\omega} = \dfrac{\eta E}{\omega^2}$, где по-прежнему $u = \dfrac{\eta E}{\omega}$, имеем

$$x(t) = x_0 - \frac{f_y}{\omega}t + r_0\cos(\omega t + \varphi_0) = x_0 - ut + r_0\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (3.17)$$
$$y(t) = y_0 + r_0\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Траектория движения заряда, определяемая данным решением, называется *циклоидой* (рис. 3.3) и представляет собой траекторию точки обода колеса, ось которого движется прямолинейно и равномерно, при движении без проскальзывания.

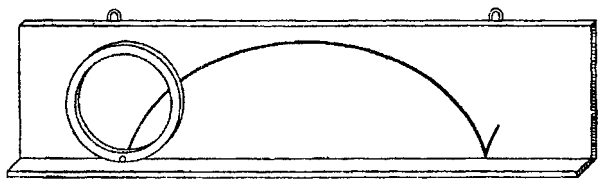


рис. 3.3

Общий случай. (3.14) можно интерпретировать как движение по окружности радиуса r_0, центр которой движется «дрейфует» с течением времени согласно

$$x_c(t) = x_0 - \frac{f_y}{\omega}t$$
$$y_c(t) = y_0 + \frac{f_x}{\omega}t$$

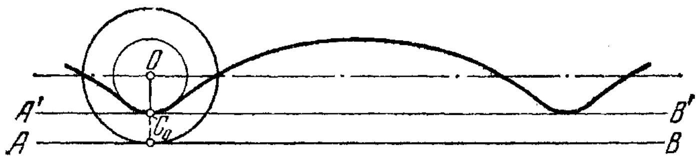


рис. 3.4

При $u > \omega r_0$ траектория движения заряда, определяемая данным решением представляет собой *укороченную циклоиду*. Ее можно представить как движение точек колеса, расстояние до которых от оси меньше расстояния до обода колеса при движении без скольжения (рис. 3.4).

При $u < \omega r_0$ траектория движения заряда, определяемая данным решением представляет собой *удлиненную циклоиду*. Ее можно представить как движение точек колеса (рис. 3.5), расстояние до которых от оси больше расстояния до обода колеса (например, *реборды* рельсового обода (рис. 3.6)) при движении без скольжения.

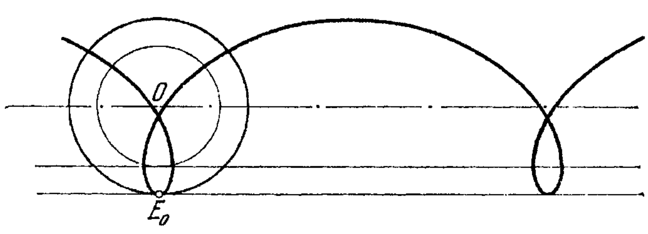


рис. 3.5

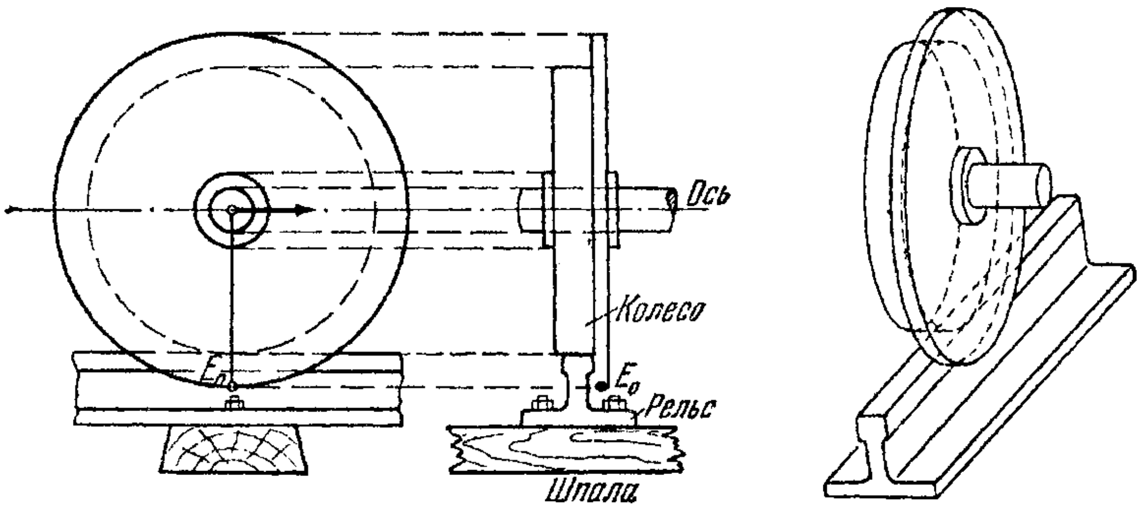


рис. 3.6

В настоящее время за простой, укороченной и удлиненной циклоидами сохранилось обобщенное название *трохоиды*. Итак, траектория заряда в скрещенных однородных электрическом и магнитном полях представляет собой трохоиду.

3.5 Проводники с током в однородных магнитных полях

Сила Ампера. Ток представляет собой направленное движение заряженных частиц, поэтому при помещении проводника с током в магнитное поле на проводник будет действовать сила. Пусть у нас имеется прямолинейный проводник длины l, по которому течет ток I. На каждый носитель заряда будет действовать сила Лоренца. Чтобы найти силу, действующую на проводник (*силу Ампера*), нужно просуммировать силы

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} q_i [\vec{v}_i, \vec{B}] = Nq[\vec{v}, \vec{B}]$$

действующие на носители тока, где $q_i = q$ – заряд носителей тока, $\vec{v}$ – средняя скорость их движения, $\vec{B}$ – индукция магнитного поля. Учитывая, что $N = nV$, где n – концентрация носителей, V – объем проводника, получаем

$$\vec{F} = qnV[\vec{v}, \vec{B}] = l[qn\vec{v}S, \vec{B}] = l[\vec{j}S, \vec{B}] = l[\vec{I}, \vec{B}] \qquad (3.18)$$

где S – поперечное сечение проводника, $\vec{j}$ – плотность тока (2.2).

Вектор момента силы. Соединим вектором $\vec{r}$ некоторую точку O с точкой приложения силы $\vec{F}$. Напомним, что моментом силы $\vec{F}$ относительно точки O называется величина

$$\vec{N} = [\vec{r}, \vec{F}] \qquad (3.19)$$

Момент пары. *Парой сил* называются две противоположно направленные силы равные по модулю. Момент пары не зависит от точки, относительно которой он вычисляется (рис. 3.7)

$$\vec{N} = [\vec{r}_1, \vec{F}_1] + [\vec{r}_2, \vec{F}_2] = -[\vec{r}_1, \vec{F}_2] + [\vec{r}_2, \vec{F}_2] = [\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{F}_2] = [\vec{r}_{12}, \vec{F}_2] \qquad (3.20)$$

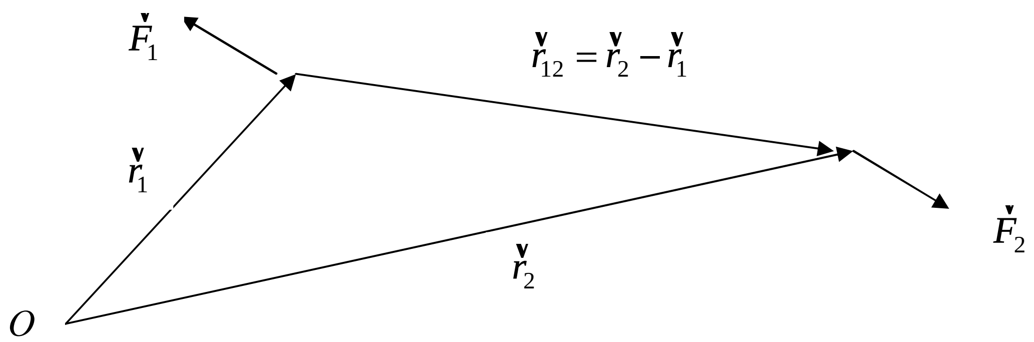


рис. 3.7

Момент сил, действующий на рамку с током в однородном магнитном поле. *Индукция в плоскости прямоугольной рамки.* Пусть рамка с током имеет вид прямоугольника (рис. 3.8, $\vartheta = 90^o$). Сила Ампера действует только на ребра 1 и 3. Поскольку сила тока в ребрах 1 и 3 одинакова, силы F_1 и F_3 образуют пару. Согласно (3.20) момент сил можно вычислять относительно любой точки, вычислим его относительно ребра 1, получаем

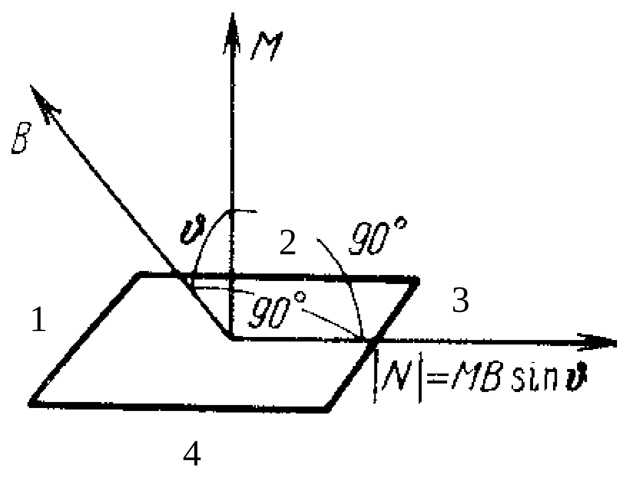


рис. 3.8

$$|\vec{N}| = |[\vec{r}, \vec{F}_3]| = abIB = SIB = MB$$

где $\vec{M}$ – *магнитный момент рамки*, модуль которого равен произведению силы тока, протекающего по рамке на площадь, ограниченную плоским контуром рамки, а направление связано с направлением тока *правилом правого винта*, т.е. если вращать правый винт по направлению тока, то направление, в котором он будет ввинчиваться, определяет направление магнитного момента рамки. Легко увидеть, что направление момента сил совпадает с направлением векторного произведения $[\vec{M},\vec{B}]$. Итак, в этом случае

$$\vec{N}=[\vec{M},\vec{B}]$$

Индукция не в плоскости прямоугольной рамки. Пусть индукция составляет угол $\vartheta\neq 90^{\circ}$ с плоскостью рамки (рис. 3.8). На ребра 2 и 4 действует сила Ампера, распирающая рамку. Вращать рамку будут стремиться силы, действующие на ребра 1 и 3. Вычисляя момент пары F_1 и F_3 относительно ребра 1, получаем

$$\left|\vec{N}\right|=\left|[\vec{r},\vec{F}_3]\right|=abIB\sin\theta=SIB\sin\theta=MB\sin\theta$$

Аналогично предыдущему пункту

$$\vec{N}=[\vec{M},\vec{B}]$$

Общий случай. Разобьем рамку с током на контуры, большие стороны которых параллельны проекции магнитной индукции на плоскость контура (рис. 3.9). Токи, идущие по большим сторонам, компенсируют друг друга, в результате чего их объединение приводит к первоначальному контуру с током по периметру. Силы Ампера, действующие на стороны контура, параллельные проекции магнитной индукции на плоскость контура, распирают его. Силы же, действующие на перпендикулярные им стороны контура, приводят к его закручиванию. Записывая ток по боковым сторонам трапеций как

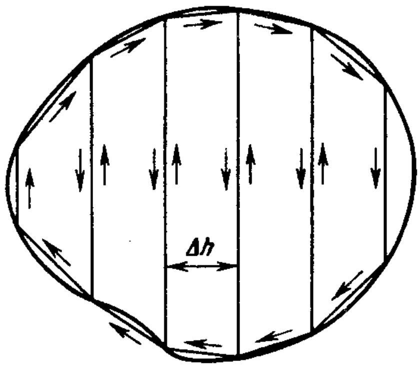


рис. 3.9

$$\vec{I}=\vec{I}_{\perp}+\vec{I}_{\parallel}$$

и используя интересующую нас первую компоненту, приходим к результату предыдущего пункта

$$\vec{N}_i=[\vec{M}_i,\vec{B}]$$

При стремлении Δh к нулю (при этом число трапеций n устремится к бесконечности) суммарная площадь трапеций разбиения контура совпадет с площадью исходного контура и мы получаем окончательно

$$\vec{N}=\sum_{i=1}^{n}\vec{N}_i=\sum_{i=1}^{n}[\vec{M}_i,\vec{B}]=[\vec{M},\vec{B}] \qquad (3.21)$$

Примеры решения задач

1. Электрон, ускоренный разностью потенциалов V_0, пролетает между пластинами плоского конденсатора и затем попадает на экран. Расстояние между пластинами d много меньше длины пластин l, а расстояние между конденсатором и экраном $L >> l$. Разность потенциалов на пластинах конденсатора $V << V_0$. Определить отклонение электрона на экране x.

Ответ: $x = \frac{l}{2d}\frac{V}{V_0}L$.

Решение. После прохождения разности потенциалов V_0 электрон приобретает скорость v в соответствии с соотношением

$$\frac{mv^2}{2} = eV_0, \qquad v = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}} \tag{1}$$

За время пролета t в поле конденсатора, определяемое соотношением

$$l = vt \tag{2}$$

электрон приобретает поперечную скорость

$$v_\perp = \frac{eE}{m}t$$

т.е. отклоняется от первоначального направления на угол $tg\alpha = v_\perp/v$. Искомое отклонение электрона составляет

$$x = Ltg\alpha = L\frac{v_\perp}{v} = \frac{eElL}{mv^2} = \frac{eVlL}{dmv^2} = \frac{VlL}{2dV_0} \tag{3}$$

где для напряженности электрического поля конденсатора $E = V/d$ использовалось соотношение (1.26).

2. Электрон, ускоренный разностью потенциалов V_0, пролетает в области однородного магнитного поля с индукцией B, перпендикулярной направлению влетающего электрона, и затем попадает на экран. Расстояние между областью однородного магнитного поля и экраном L много больше размера этой области l. Определить отклонение электрона на экране y при условии малости угла отклонения электрона в магнитном поле.

Ответ: $y = L\frac{elB}{mv}$.

Решение. В соответствии с (3.1) электрон в магнитном поле приобретает поперечную скорость

$$v_y = \frac{\Delta p_y}{m} = \frac{eBvt}{m}$$

где скорость ускоренного разностью потенциалов V_0 электрона v и время его пролета t в магнитном поле определяются соотношениями (1) и (2) предыдущей задачи. Искомое отклонение электрона составляет

$$y = Ltg\beta = L\frac{v_y}{v} = L\frac{eBvt}{mv} = L\frac{elB}{mv} \qquad (1)$$

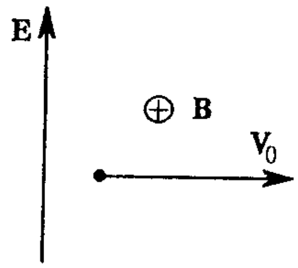
3. В плоском конденсаторе длины l напряженность электрического поля равна E, а индукция магнитного поля, направленного вдоль E, равна B. У входа в конденсатор имеется радиоактивный источник, испускающий электроны с разными скоростями. Из них формируют тонкий пучок, проходящий через конденсатор, который затем попадает на экран, расположенный на расстоянии $L >> l$. Какую линию «вычертят» на экране электроны, если отклонения от прямолинейной траектории малы?

Ответ: $x = \dfrac{mE}{LelB^2}y^2$.

Решение. Отклонения электронов электрическим и магнитным полями будут происходить в перпендикулярных направлениях. Используя соотношение (3) первой задачи и соотношение (1) второй задачи получаем

$$x = \frac{eElL}{mv^2} = \frac{eElL}{m}\frac{1}{v^2} = \frac{eElL}{m}\left(\frac{my}{LelB}\right)^2 = \frac{mE}{LelB^2}y^2$$

4. Положительно заряженная частица движется в однородных взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях (см. рис.). В некоторый момент времени скорость частицы перпендикулярна векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$ и равна V_0. Чему будет равна скорость этой частицы в те моменты, когда вектор ее скорости будет составлять 180° с вектором V_0, при условии, что $E = V_0B$? Поле тяжести не учитывать.



Ответ: $V_x = -3V_0$.

Решение. Из уравнения (3.13) имеем

$$\Delta V_x = -\omega\Delta y$$

где $\omega = qB/m$ – циклотронная частота. Учитывая начальные условия, получаем

$$V_x = V_0 - \omega y \qquad (1)$$

где y-координата в начальный момент времени выбрана равной нулю. При движении частица получает энергию за счет работы внешнего электрического поля (1.14). Сила Лоренца работы не совершает (3.2). Запишем закон сохранения энергии для моментов времени, когда y-компоненты скорости частицы равны нулю

$$\frac{mV_0^2}{2} = E_1 = E_2 = T + U = \frac{mV_x^2}{2} - qEy \qquad (2)$$

Подставляя (1) в (2) и учитывая, что $E = V_0B$, получаем квадратное уравнение относительно V_x

$$V_x^2 + 2V_0V_x - 3V_0^3 = 0$$

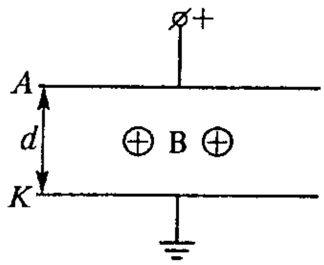
решением которого является

$$V_x = V_0 \pm \sqrt{V_0^2 + 3V_0^2}$$

Интересующим нас решением является

$$V_x = -\,3V_0$$

5. Вакуумный плоский диод, в котором расстояние между катодом *К* и анодом *А* равно *d*, находится в однородном магнитном поле с индукцией *B*, направленной параллельно плоскости электродов (см. рис.). При каком минимальном напряжении на диоде электроны с поверхности катода смогут достичь анода? Электроны у поверхности катода считать неподвижными, полем тяжести пренебречь.



Ответ: $V = Ed = \dfrac{q(Bd)^2}{2m}$.

Решение. Учитывая начальные условия из уравнения (3.13) имеем

$$V_x = -\,\omega y \qquad (1)$$

где $\omega = qB/m$ – циклотронная частота, y-координата в начальный момент времени выбрана равной нулю. Из (3.14) с учетом того, что $f_x = 0$ имеем

$$y(t) = y_0 + r_0\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (2)$$

минимальное напряжение на диоде, при котором электроны смогут достигать анода, отвечает условию

$$y_{\max} = d$$

т.е. $y_0 + r_0 = d$

кроме того, имеем очевидное условие

$$y_{\min} = 0$$

т.е. $y_0 - r_0 = 0$

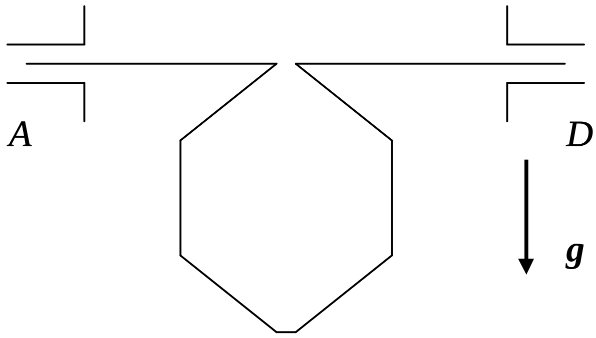
Складывая эти уравнения получаем $y_0 = d/2$, вычитая – получаем $r_0 = d/2$. В верхней точке траектории y-компонента скорости электрона равна нулю, x-ая имеет максимальное значение. Закон сохранения энергии для моментов времени, когда электрон находится вблизи катода и анода, с учетом (1), (2) и найденных значений y_0 и r_0 принимает вид

$$0 = E_1 = E_2 = T + U = \frac{mV_x^2}{2} - qEd = \frac{m}{2}(d\omega)^2 - qEd$$

Откуда с учетом выражения для циклотронной частоты для искомого напряжения имеем

$$V = Ed = \frac{q(Bd)^2}{2m}$$

6. В поле тяжести Земли помещен изогнутый в виде правильного шестиугольника проводник со стороной l и линейной плотностью ρ, шарнирно закрепленный в точках A и D (см. рис.), по которому течет ток I. Найти угол отклонения плоскости шестиугольника от вертикали при включении однородного вертикального магнитного поля с индукцией B.



Ответ: $a = arctg\left(\frac{\sqrt{3}IB}{4rg}\right)$.

Решение. При отклонении рамки на искомый угол α момент силы тяжести (сила приложена в центре тяжести шестиугольника)

$$N_g = mgl\sin a = 6rl^2 g\sin a$$

где m – масса шестиугольника, компенсируется моментом силы (3.21), действующей на рамку с током

$$N = MB\sin(\pi/2-\alpha) = ISB\cos\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2}Il^2B\cos\alpha$$

где S – площадь шестиугольника. Приравнивая приведенные выражения, получаем

$$tga = \frac{\sqrt{3}IB}{4rg}$$