

Общеобразовательная школа №1189 им. И.В. Курчатова

# Цепи переменного тока

Составитель: Бойченко А.М.

Пособие по физике, 10 класс

электродинамика, ч. 5

цепи переменного тока

Москва 2014

**Оглавление**

5 Колебания .....	3
5.1 Свободные электрические колебания .....	3
Уравнение колебаний .....	3
Формула Томсона .....	4
Решение уравнения колебаний .....	4
Аналогия между электрическими и механическими колебаниями .....	5
5.2 Вынужденные электрические колебания .....	5
Электрические цепи переменного тока .....	5
Промышленные генераторы тока .....	6
Связь между напряжением и силой тока на различных элементах .....	7
Связь между напряжением и силой тока на сопротивлении .....	7
Связь между напряжением и силой тока на емкости .....	7
Связь между напряжением и силой тока на индуктивности .....	7
Векторные диаграммы .....	7
Пример использования метода векторных диаграмм .....	8
Резонанс в цепи переменного тока .....	10
Мощность в цепи переменного тока .....	11
Триод .....	12
Ламповый генератор .....	13
Магнитные материалы .....	13
Диамagnetики .....	13
Парамагнетики .....	14
Ферримагнетики .....	14
Структура .....	14
Поведение во внешних магнитных полях .....	14
Трансформатор .....	15
Токи Фуко .....	17
Приложение 1. Аналогия между электрическими и механическими колебаниями .....	19
Приложение 2. Основные обозначения элементов электрических цепей .....	20
Примеры решения задач .....	25

## 5 Колебания

*Колебаниями* называют повторяющиеся (*периодические*) или почти повторяющиеся процессы или движения. Колебаниям может быть подвержена любая физическая величина. Если это, например, колебание груза на пружинке или на нити, то говорят о *механических колебаниях* (см. пособие по механическим колебаниям). Если это, например, колебание заряда или тока в электрической цепи, то говорят об *электрических колебаниях*. Среди всех видов колебаний особую роль занимают *гармонические колебания*, т.е. колебания по закону синуса или косинуса, которые в основном и будут нами изучаться.

Если система в процессе колебаний предоставлена самой себе в отсутствии внешних воздействий, то говорят о *свободных* или *собственных колебаниях*. Если колебания происходят за счет непосредственного периодического воздействия на нее извне, то такие колебания называют *вынужденными*. Выделяют также *параметрические* колебания, когда периодически меняют параметры колебательной системы, и *автоколебания*, когда происходит самовозбуждение системы и возникают самосогласованные колебательные движения, например, в результате развития неустойчивостей.

### 5.1 Свободные электрические колебания

**Уравнение колебаний.** Рассмотрим простейшую электрическую цепь, состоящую из конденсатора и катушки индуктивности (рис. 5.1). Зарядим конденсатор (зарядом  $q_0$ ) и подсоединим к нему катушку индуктивности (это можно реализовать введением в цепь ключа и замыканием им цепи после зарядки конденсатора). Поскольку в цепи нет источников э.д.с., то второе правило Кирхгофа (2.8) имеет вид

$$U_C + U_L = 0$$

Используя для напряжения на конденсаторе  $U_C$  и индуктивности  $U_L$  выражения (1.27) и (4.25), получаем

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

Определение силы тока (2.1) в случае, когда он не постоянен, модифицируется. Теперь следует брать не конечные, а бесконечно малые промежутки времени при его нахождении

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta q}{\Delta t} \right) = \frac{dq}{dt} = \dot{q} \quad (5.1)$$

тогда рассматриваемое нами уравнение принимает вид

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0 \quad (5.2)$$

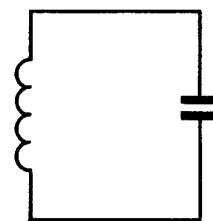


рис. 5.1

где  $\ddot{q} = \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dq}{dt} \right) = \frac{d^2q}{dt^2}$  – вторая производная от заряда по времени.

Уравнение (5.2) можно получить и из закона сохранения энергии. Полная энергия, содержащаяся в цепи в произвольный момент времени, состоит из энергии  $\frac{q^2}{2C}$ , содержащейся в конденсаторе (1.34), и энергии  $\frac{LI^2}{2}$ , содержащейся в катушке индуктивности (4.29). Поскольку резистора в схеме нет, то рассеяния (потери) энергии в ней не происходит, полная энергия сохраняется, следовательно, производная по времени от нее равна 0

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} \right) = \frac{q\dot{q}}{C} + LI\dot{I} = I \left( LI\dot{I} + \frac{q}{C} \right) = I \left( L\ddot{q} + \frac{q}{C} \right) = 0$$

Т.к. ток  $I$  не равен тождественно нулю, то мы получаем уравнение (5.2).

*Формула Томсона.* Сравнивая (5.2) с видом уравнения гармонических колебаний (3.8) получаем, что (*собственная*) частота колебаний (или частота *свободных колебаний*) заряда (и тока) равна

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.3)$$

соответственно, период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC} \quad (5.4)$$

Последнее соотношение называется *формулой Томсона*.

*Решение уравнения колебаний.* Решением уравнения (5.2) является функция (3.9). Выбором начального момента времени мы всегда можем занулить начальную фазу, имеем

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) \quad (5.5)$$

В этом случае зависимость тока от времени в соответствии с (5.1) имеет вид

$$I(t) = \dot{q}(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\omega q_0 \sin(\omega t) = I_0 \cos(\omega t + \pi/2) \quad (5.6)$$

откуда видно, что амплитуды тока  $I_0$  и заряда  $q_0$  связаны соотношением

$$I_0 = \omega q_0 \quad (5.7)$$

и зависимость тока от времени опережает по фазе на  $\pi/2$  зависимость от времени заряда конденсатора. Это означает, например, что при разрядке конденсатора (обращении заряда на его обкладках в ноль) ток в цепи не прекращается, что является следствием явления самоиндукции (см. пособие по уравнениям Максвелла). Индуктивность катушки в этом случае является подобно массе в механических колебаниях тем самым инерционным элементом, благодаря которому колебания не прекращаются. При колебании тела массы  $m$  оно не останавливается в положении равновесия, а движется далее по инерции. При наличии в цепи катушки индуктивности  $L$  ток в цепи не прекращается при обнулении заряда конденсатора. К моменту обращения тока

в ноль, произойдет полная зарядка конденсатора, но его полярность изменится, после чего он опять начнет разряжаться и т.д. до бесконечности. Вообще говоря, аналогия между механическими и электрическими колебаниями проявляется не только в упомянутом обстоятельстве. Рассмотрим это подробнее.

**Аналогия между электрическими и механическими колебаниями.** В таблице (приложение 1) представлены электрические величины и соответствующие им механические. Представление начинается с уже упомянутой аналогии  $L$  и  $m$  и постепенно в него вовлекаются остальные величины, так что дополнительные комментарии практически не требуются.

## 5.1 Вынужденные электрические колебания

**Электрические цепи переменного тока.** Вынужденные колебания можно получить введением в электрическую цепь э.д.с., зависящей от времени. Такая э.д.с. возникает, например, при вращении металлической рамки во внешнем магнитном поле. Поток магнитной индукции через рамку равен (рис. 5.2)

$$\Phi = BS \cos \alpha$$

где  $S$  – площадь рамки. Пусть магнитная индукция  $B$  постоянна, а рамка вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Тогда  $\alpha = \omega t$  и

$$\Phi = BS \cos \omega t$$

Согласно закону электромагнитной индукции (4.17) э.д.с., создаваемая в контуре рамки, равна

$$\varepsilon(t) = -\Phi' = -BS(\cos \omega t)' = BS\omega \sin \omega t = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

где  $\varepsilon_0 = BS\omega$  – амплитуда возникающей э.д.с. Для отвода тока используется система *контактных колец с щетками*, представляющая собой неподвижные пластины, прижатые к кольцам и осуществляющие связь вращающейся рамки с внешней цепью. Отметим, что в рассмотренном случае сторонние силы, вызывающие переменную э.д.с. имеют магнитную природу (сторонние силы в гальванических элементах имеют химическую природу, т.к. возникают за счет протекания химических реакций вблизи электродов).

При возбуждении вынужденных колебаний все величины в системе будут изменяться с частотой равной частоте вынужденных колебаний. Если говорить точнее, то в системе при ее возбуждении возможно возникновение также и собственных колебаний, т.е. в системе могут также появляться и собственные частоты. Но они рано или поздно в результате действия диссипативных процессов исчезнут, т.к. такие частоты не будут поддерживаться внешним источником. Итак, в течение какого-то времени в системе могут присутствовать

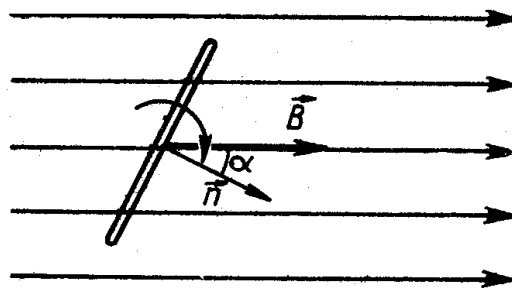


рис.5.2

различные частоты, в том числе и не совпадающие с вынужденными, но последние будут затухать и с некоторого момента в ней останутся только колебания на вынужденных частотах.

*Промышленные генераторы тока.* При использовании  $n$  витков поток магнитной индукции через них увеличивается в  $n$  раз, поэтому в промышленных установках используется не один виток, а обмотка из нескольких витков. Поток магнитной индукции в веществах с большими магнитными проницаемостями  $\mu$  (ферромагнетики) растет линейно с  $\mu$  за счет того, что растет создаваемая обмоткой магнитная индукция (см., например, задачу 6 пособия по уравнениям Максвелла). Используемые обмотки поэтому представляют собой намотки из витков, содержащихся в пазах *сердечников* (обычно изготавливаемых из специальной электротехнической стали). Один из сердечников служит для создания магнитного поля, на его обмотки подается постоянный ток от генератора постоянного тока, называемого *возбудителем*. С обмоток другого сердечника снимается переменный ток. Сила тока, подаваемого с возбудителя обычно существенно меньше силы снимаемого переменного тока, поэтому именно для него используется система колец и щеток, соответственно, этот сердечник вращается (*ротор*). Сердечник с обмотками, с которых снимают переменный ток, остается неподвижным (*статор*). Зазор между ротором и статором делают как можно меньше для предотвращения потерь потока магнитной индукции (рис. 5.3).

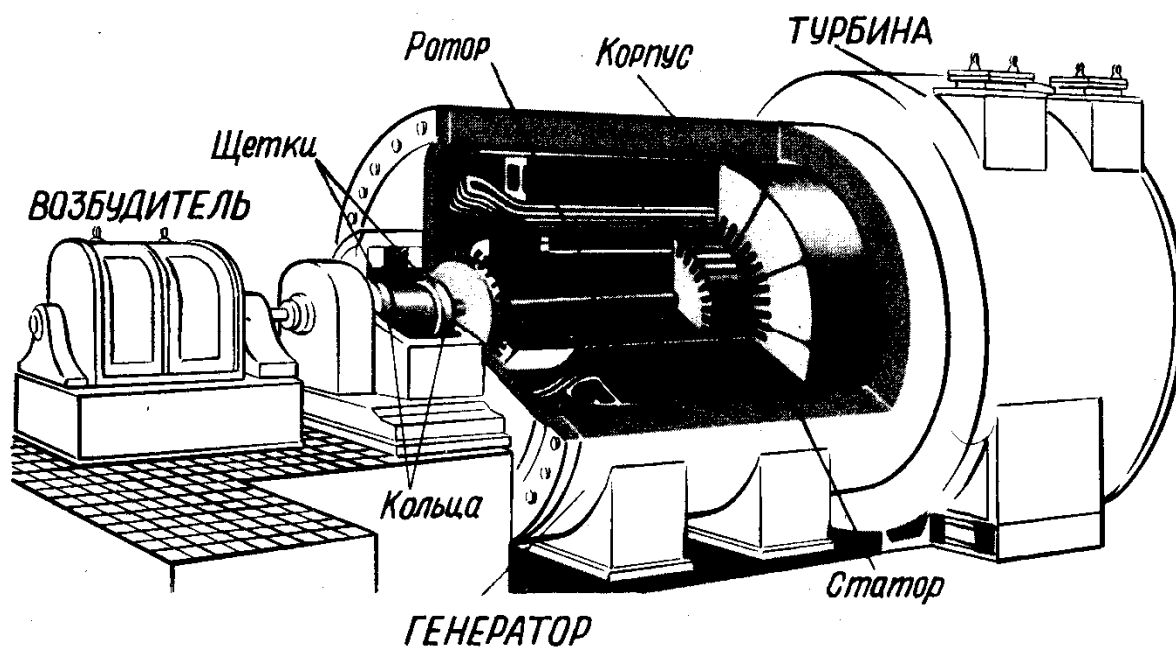


рис. 5.3

Промышленная частота тока, используемая на территории России, составляет 50 Гц. При вращении двухполюсного магнита это соответствует 3000 оборотам ротора в минуту и вызывает большие сложности реализации.

Поэтому практическое применение нашли магниты из десятков пар полюсов. При использовании 48 пар полюсов число оборотов снижается до 62.5 в минуту. В маломощных генераторах в качестве ротора используют постоянный магнит, в этом случае нет необходимости в использовании колец и щеток.

**Связь между напряжением и силой тока на различных элементах.**

*Связь между напряжением и силой тока на сопротивлении.* Пусть через (активное) сопротивление  $R$  идет ток

$$J(t) = J_0 \cos(\omega t). \quad (5.8.1)$$

Напряжение на сопротивлении, согласно закону Ома (2.4), будет иметь вид

$$U(t) = RJ(t) = U_0 \cos(\omega t) \quad (5.8.2)$$

где амплитуда напряжения  $U_0 = RJ_0$ . Фазы тока и напряжения совпадают.

*Связь между напряжением и силой тока на емкости.* Если напряжение на конденсаторе имеет вид

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t) \quad (5.9.1)$$

то согласно (1.27) заряд обкладок меняется во времени как

$$q(t) = CU(t) = CU_0 \cos(\omega t) = q_0 \cos(\omega t)$$

Для тока из (5.1) (см. также (5.5)-(5.7)) имеем

$$J(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dU(t)}{dt} = -C\omega U_0 \sin(\omega t) = J_0 \cos(\omega t + \pi/2) \quad (5.9.2)$$

где  $C$  – емкость конденсатора. Видно, что ток опережает по фазе напряжение на  $\pi/2$ . Отличие формул (5.5), (5.6) от (5.9) состоит только в том, что в (5.5), (5.6) частота колебаний определяется параметрами системы, а в (5.9) – частота определяется внешним воздействием на систему. Амплитуда напряжения  $U_0$  связана с амплитудой тока  $J_0$  соотношением

$$U_0 = \frac{J_0}{\omega C} = Z_C J_0 \quad (5.9.3)$$

Величина  $Z_C$  называется *емкостным сопротивлением*.

*Связь между напряжением и силой тока на индуктивности.* При прохождении через индуктивность тока

$$J(t) = J_0 \cos(\omega t) \quad (5.10.1)$$

зависимость напряжения от времени будет определяться соотношением (4.25)

$$U(t) = L \frac{dJ(t)}{dt} = -L\omega J_0 \sin(\omega t) = U_0 \cos(\omega t + \pi/2) \quad (5.10.2)$$

В данном случае напряжение по фазе опережает ток на  $\pi/2$ . Амплитуда напряжения  $U_0$  связана с амплитудой тока  $J_0$  соотношением

$$U_0 = L\omega J_0 = Z_L J_0 \quad (5.10.3)$$

Величина  $Z_L$  называется *индуктивным сопротивлением*.

**Векторные диаграммы.** Значение функции

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

можно рассматривать как проекцию вектора  $\mathbf{u}_0$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega$ , на горизонтальную ось, соответствующую нулевому углу (рис.

5.4). Модуль данного вектора равен амплитуде колебаний  $u_0$ , его направление составляет угол  $\alpha$  с горизонтальной осью. Значение суммы функций

$$u(t) + v(t) = u_0 \cos(\omega t + \alpha) + v_0 \cos(\omega t + \beta) \quad (5.11)$$

можно рассматривать как сумму проекций вращающихся векторов  $u_0$  и  $v_0$ , т.е. как проекцию вращающегося вектора  $s_0$ , представляющего собой сумму этих векторов  $s_0 = u_0 + v_0$ . Итак, для нахождения (5.11) в произвольный момент времени следует i) построить векторную сумму векторов амплитуд  $u_0 + v_0$ , ii) вращать получившийся вектор  $s_0$  с угловой скоростью  $\omega$  и iii) проектировать этот вращающийся вектор на горизонтальную ось в рассматриваемый момент времени. При этом начальное положение вращающегося вектора будет совпадать с положением вектора  $s_0$ . Таким образом, вектора амплитуд  $u_0$  и  $v_0$  полностью определяют сумму (5.11) в произвольный момент времени, способ нахождения этой суммы называют *методом векторных диаграмм*.

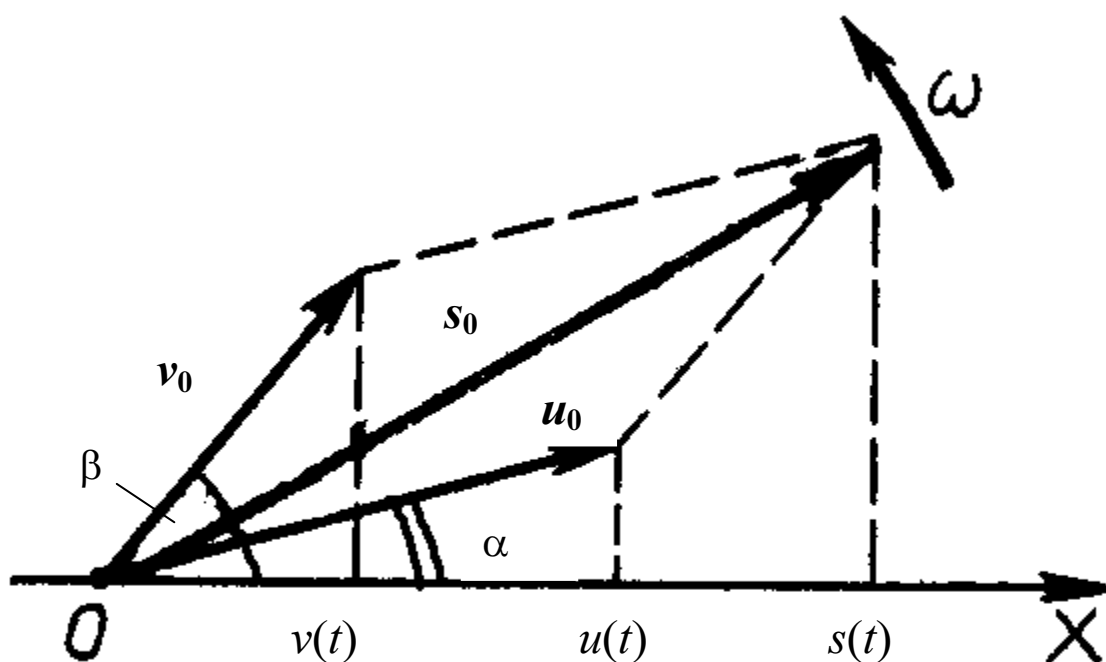


рис. 5.4

*Пример использования метода векторных диаграмм.* Рассмотрим участок цепи, представляющий собой последовательное соединение резистора, конденсатора и катушки индуктивности (рис. 5.5). Далее будем отсчитывать углы не от горизонтальной, а от вертикальной оси. При последовательном соединении сила тока, протекающая через эти элементы, одна и та же. Пусть она имеет вид (5.8.1). Тогда согласно (5.8)-(5.10) напряжения на векторной диаграмме расположены следующим образом (рис. 5.6): вектор  $U_R$  (напряжение



на резисторе) сонаправлен с вектором тока  $J_0$ , напряжение на емкости отстает на  $\pi/2$  от тока (вектор  $U_C$  повернут вправо на  $\pi/2$  относительно вертикальной оси), а напряжение на индуктивности опережает ток на  $\pi/2$  (вектор  $U_L$  повернут влево на  $\pi/2$  относительно вертикальной оси). Векторная сумма

$$\vec{U}_0 = \vec{U}_L + \vec{U}_R + \vec{U}_C$$

представляет собой вектор амплитуды напряжения на рассматриваемом последовательном соединении (рис. 5.6). Его длина в соответствии с теоремой Пифагора равна

$$U_0^2 = U_y^2 + U_x^2 = (J_0 R)^2 + \left( J_0 \left( \frac{1}{\omega C} - \omega L \right) \right)^2 = J_0^2 \left( R^2 + \left( \frac{1}{\omega C} - \omega L \right)^2 \right)$$

а угол с вертикальной осью соответствует величине

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_y}{U_x} = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L} \right)$$

Поскольку вектор  $U_0$  повернут вправо относительно вертикальной оси (рис. 5.6), окончательно получаем

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t - \varphi) \tag{5.12}$$

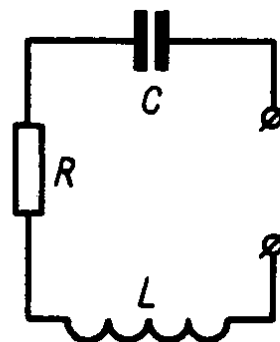


рис. 5.5

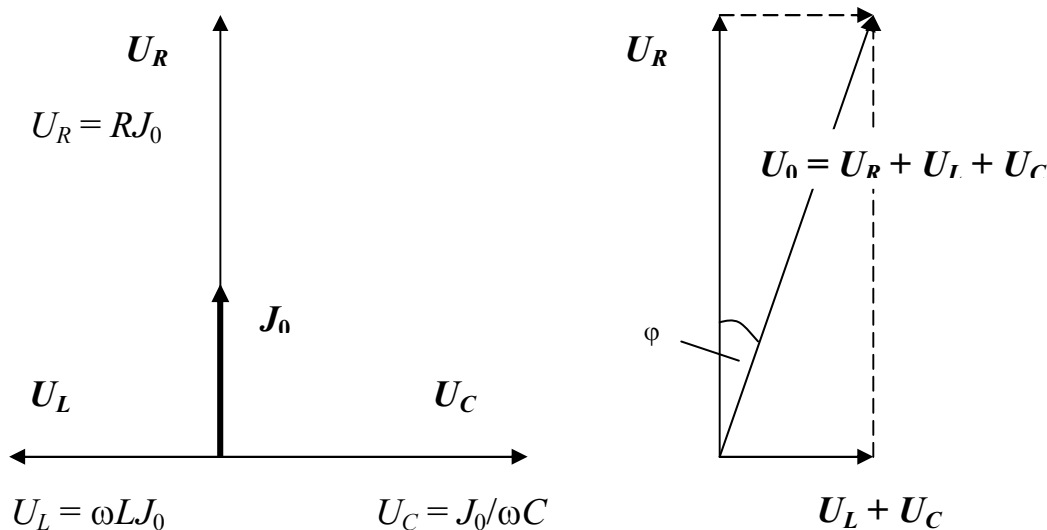


рис. 5.6

Величина

$$Z = \frac{U_0}{J_0} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2} \tag{5.13}$$

называется *полным (реактивным) сопротивлением* рассматриваемого участка цепи.

**Резонанс в цепи переменного тока.** Под *резонансом* понимают отклик колебательной системы на периодическое воздействие с частотой, близкой к ее собственной частоте колебаний. В условиях резонанса амплитуда колебаний резко возрастает.

Если на рассмотренный в предыдущем разделе участок цепи подать переменное напряжение, например, подсоединить к розетке с переменным током, то значение  $U_0$  будет фиксировано – оно определяется амплитудой переменной э.д.с. розетки. Значение  $J_0$  будет представлять собой функцию от  $\omega$  (рис. 5.7) и достигает максимума при

$$\omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC} \tag{5.14}$$

в которой значение корня (5.13) минимально. Эта частота называется *резонансной*. При активном сопротивлении, стремящемся к нулю ( $R \rightarrow 0$ ), значение  $J_0$  стремится к бесконечности.

Явление резонанса используется в радиоприемниках. Электрические колебания, возбуждаемые в антенне радиоприемника, передаются на колебательный контур (рис. 5.8). Плавным изменением его емкости и/или индуктивности мы можем менять частоту возбуждаемых в нем колебаний. В результате, хотя в контуре возбуждаются колебания на всех частотах (на частотах всех радиостанций) лучше всего возбуждаются электрические колебания на частоте, близкой к (5.14). Именно передачу этой радиостанции мы и «слышим».

Отметим, что в условиях резонанса (5.14) при  $L \gg R^2 C$  амплитуды напряжения на емкости (5.9.3)

$$U_{0C} = \frac{J_0}{\omega_{\text{рез}} C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{U_0}{R} \gg U_0$$

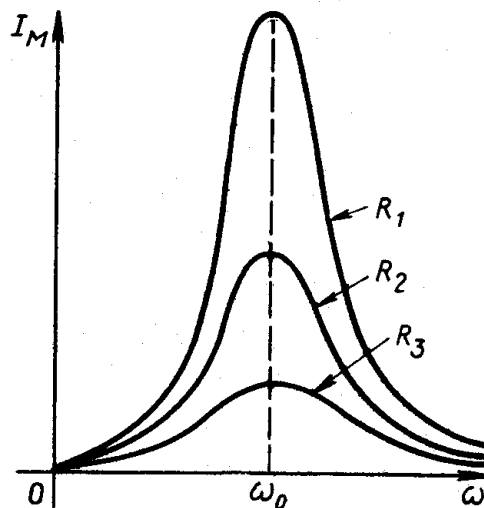


рис. 5.7. Максимальное значение тока  $I_M = J_0$ .  $R_1 < R_2 < R_3$ .

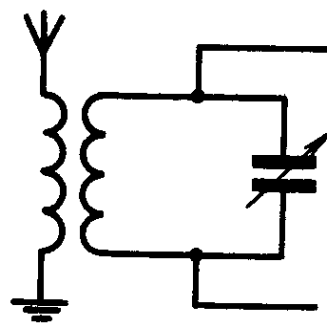


рис. 5.8

$$U_{0L} = \omega_{\text{рез}} L J_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{U_0}{R} \gg U_0$$

оказываются много больше амплитуды напряжения на всем участке цепи  $U_0$ . Таким образом, при проектировании цепи переменного тока, ее параметры нужно подбирать так, чтобы в ней резонансные частоты различных участков были далеки от используемой частоты во избежание выхода из строя ее элементов.

**Мощность в цепи переменного тока.** Как мы уже видели на примере последовательного соединения резистора, конденсатора и катушки индуктивности (5.12), напряжение  $U(t)$  на каком-либо участке цепи в общем случае сдвинуто по фазе на  $\varphi$  относительно силы тока  $J(t)$ . Мощность, потребляемая этим участком цепи в момент времени  $t$  (*мгновенная мощность*), определяется согласно (2.5) выражением

$$P(t) = U(t)J(t) = U_0 J_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t) \quad (5.15)$$

Мгновенная мощность быстро осциллирует по времени и не совсем удобна с точки зрения определения затрат энергии на данном участке цепи в течение больших промежутков времени. В этом плане лучше использовать *среднюю мощность*

$$\langle P \rangle = \frac{\int_0^T P(t) dt}{T} \quad (5.16)$$

где  $T$  – период вынужденных колебаний. Имеем

$$\langle P \rangle = \frac{U_0 J_0}{T} \int_0^T \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t) dt = \frac{U_0 J_0}{2T} \int_0^T [\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi] dt$$

Здесь использована формула произведения косинусов (см. справочник-указатель). Итак, интегрируя последнее выражение, получаем

$$\langle P \rangle = \frac{U_0 J_0}{2T} \left( \frac{\sin(2\omega t + \varphi)}{2\omega} + t \cos \varphi \right) \Big|_0^T = \frac{U_0 J_0}{2} \cos \varphi$$

Первое слагаемое после подстановки пределов интегрирования занулилось из-за периодичности синуса ( $2\omega T = 4\pi$ ). Данное выражение обычно записывают в виде

$$\langle P \rangle = U_{\text{д}} J_{\text{д}} \cos \varphi \quad (5.17)$$

где

$$U_{\text{д}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \quad J_{\text{д}} = \frac{J_0}{\sqrt{2}} \quad (5.18)$$

называются *действующими значениями* напряжения и силы тока. Множитель  $\cos \varphi$  в (5.17) называется *коэффициентом мощности*. При малых коэффициентах мощности энергия в основном будет циркулировать от источника тока до потребляющего устройства, следовательно, значительная энергия будет поглощаться в подводящих проводах. Чтобы этого не

происходило, запрещается использовать промышленные устройства с  $\cos\varphi < 0.85$ .

Средняя мощность, потребляемая резистором ( $\varphi = 0$ ) совпадает с выражением (2.5), если использовать действующие значения напряжения и силы тока. Введение понятий действующих значений обязано именно этому обстоятельству. Когда говорят, что напряжение на розетке 220 В, то подразумевается действующее значение напряжения на розетке.

Катушка индуктивности, как и конденсатор, не потребляют электрической энергии ( $\varphi = \pm\pi/2$ ). В течение одной половины периода колебаний эти элементы потребляют энергию из цепи, в течение другой половины – возвращают ее в цепь.

**Триод.** Ранее (см. пособие по цепям постоянного тока) мы познакомились с вакуумной двухэлектродной лампой (диодом). Если между анодом (см. обозначение триода на схемах цепей в приложении 2 – прямая линия вверху) и катодом (изогнутая линия) расположить еще один (средняя пунктирная линия) третий электрод (называемый также *сеткой*), то такая *трехэлектродная лампа* называется *триодом* (рис. 5.9). Этот электрод прозрачен для электронов, позволяя им двигаться к аноду. При увеличении разности потенциалов между сеткой и катодом  $U_c$

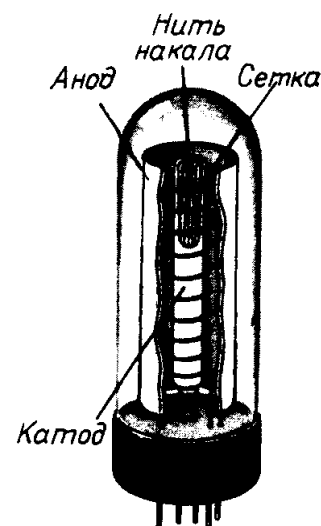


рис. 5.9

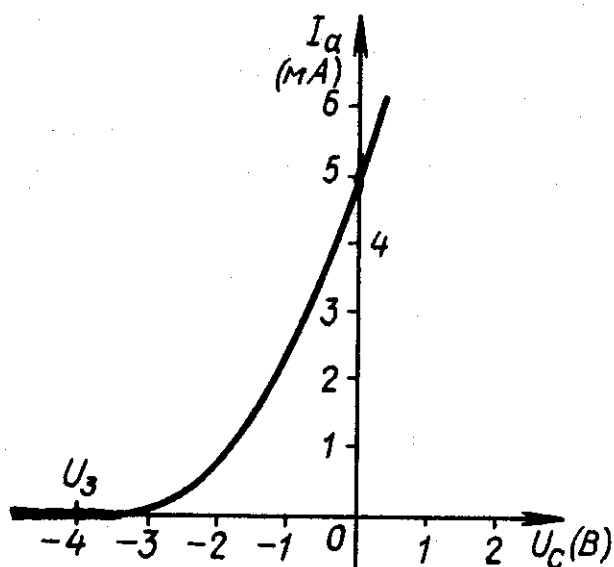


рис. 5.10

(сеточном напряжении) сила тока в лампе (или *анодного тока*  $I_a$ ) увеличивается, при уменьшении – уменьшается. При определенной разности потенциалов она обратится в ноль. Эта разность потенциалов называется *потенциалом запирания лампы*  $U_з$  и зависит от разности потенциалов между анодом и катодом (*анодного напряжения*) и ее конструкции (см. рис. 5.10 – *сеточная характеристика лампы*). Как правило, сетка располагается ближе к катоду, в результате чего для одного и того же изменения анодного тока требуются небольшие изменения

сеточного напряжения по сравнению с анодным.

**Ламповый генератор.** Триоды широко используются в радиотехнике. Одно из их применений связано с реализацией генерации высокочастотных электрических колебаний. Низкочастотные колебания при распространении в воздухе быстро затухают, поэтому для осуществления радиосвязи требуются высокочастотные несущие компоненты (см. пособие по электромагнитным волнам). Промышленные генераторы тока, как мы видели выше, не способны генерировать частоты, существенно превосходящие 100 Гц.

В ламповом генераторе используется обычный колебательный контур. За счет выбора  $L$  и  $C$  можно возбудить произвольную частоту (5.3) колебаний. Но энергию из контура придется выводить, радиоволна, как и любая волна, несет энергию, поэтому колебания будут затухать, кроме того, соединительные провода имеют отличное от нуля сопротивление (хоть и достаточно малое), что также будет способствовать затуханию колебаний контура. Необходимую подпитку энергией колебаний контура позволяет осуществить подключение к нему триода, индуктивности  $L_C$  и батареи источников постоянного напряжения  $B_A$  (рис. 5.11). Как мы видели выше (5.10.1),

(5.10.2), напряжение на индуктивности опережает по фазе ток на  $\pi/2$ . Напряжения на катушках  $L$  и  $L_C$  совпадают по фазе, поскольку они намотаны на один и тот же сердечник (см. ниже раздел трансформаторы). Поэтому в зависимости от порядка подключения концов катушки  $L_C$  к катоду и сетке триода, анодный ток будет либо в противофазе с током контура (тогда колебания прекратятся), либо будет совпадать по фазе с ним (тогда будет происходить подпитка энергией колебаний в контуре). В последнем случае реализуется *обратная связь* контура с триодом: контур сам регулирует через индуктивность  $L_C$  нужный момент открытия триода и, соответственно, свою подпитку энергией для поддержания незатухающих колебаний.

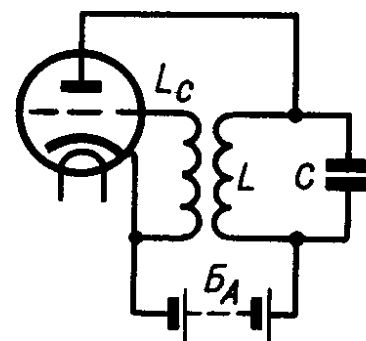


рис. 5.11

Из рассмотренного принципа работы лампового генератора видно, что он представляет собой пример автоколебательной системы. Незатухающие колебания поддерживаются в нем за счет энергии источника постоянного напряжения, а не за счет внешнего периодического воздействия.

**Магнитные материалы.** Всякое вещество под действием магнитного поля способно намагничиваться, т.е. является *магнетиком*. Магнитная восприимчивость вещества  $\chi$  характеризует намагниченность единичного объема (4.10), (4.13). Наряду с ней используется также *молярная восприимчивость*  $\chi_m = \chi V_m$ , где  $V_m$  – объем моля вещества. Магнетики условно можно разделить на три группы:

**Диамагнетики.** Восприимчивость отрицательна,  $|\chi_m| = 10^{-11} - 10^{-10}$  м<sup>3</sup>/моль.

**Парамагнетики.** Восприимчивость положительна,  $\chi_m = 10^{-10} - 10^{-9}$  м<sup>3</sup>/моль. Подобно парамагнетикам слабую намагниченность под действием внешнего магнитного поля приобретают также *антиферромагнетики* (см. ниже). Различие между ними проявляется в температурной зависимости магнитной восприимчивости. При нагревании антиферромагнетика выше определенной температуры (*температуры Нееля*) антиферромагнитные свойства теряются, он становится обычным парамагнетиком.

**Ферримагнетики.** Восприимчивость положительна и может достигать больших величин,  $\chi_m \sim 1$  м<sup>3</sup>/моль, что привело к их широкому применению в электротехнике. Она, вообще говоря, не постоянна и зависит от величины магнитного поля. Ферримагнетикам присуще явление остаточного магнетизма – намагниченность образца остается при снятии внешнего поля, благодаря чему они используются для изготовления постоянных магнитов.

**Структура.** Атомы или молекулы ферримагнетиков образуют несколько *магнитных подрешеток*, каждая из которых может иметь сложную пространственную ориентацию. Отличная от нуля векторная сумма намагниченностей подрешеток представляет собой самопроизвольную намагниченность вещества. Упомянутые выше антиферромагнетики представляют собой частный случай ферримагнетиков, когда вклад магнитных подрешеток компенсируется, что приводит к отсутствию самопроизвольной намагниченности. Наиболее обширный класс ферримагнетиков образуют *ферриты* – химические соединения окиси железа Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> с окислами других металлов. Вещества, имеющие только одну магнитную подрешетку, представляют собой также частный случай ферримагнетиков и называются *ферромагнетиками*. При нагревании ферримагнетика выше определенной температуры (*температуры Кюри*) самопроизвольная намагниченность исчезает, вещество приобретает парамагнитные свойства. Наиболее сильно ферромагнитные свойства выражены у железа, никеля и кобальта (температуры Кюри, соответственно, 753, 365 и 1000 °С)

**Поведение во внешних магнитных полях.** Если образец ни разу не подвергался намагничиванию (этого можно достичь нагрев его до температуры Кюри и охладив), то зависимость намагниченности  $J$  от напряженности внешнего поля  $H$  имеет характерный вид, представленный на рис. 5.12 (кривая внутри петли, исходящая из точки  $O$ ). Начиная с некоторой величины  $H$ , намагниченность выходит на насыщение (точка  $a$ ), т.е. магнитные подрешетки образца максимально

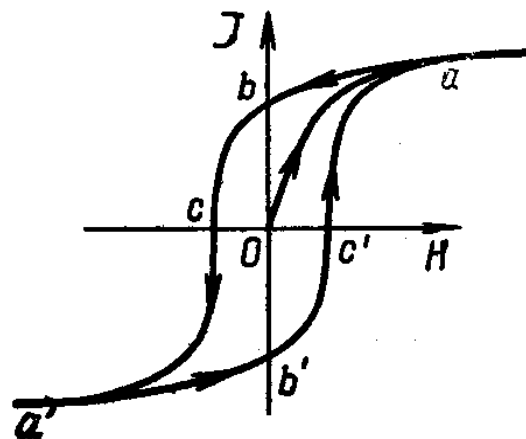


рис. 5.12

подстроились под внешнее поле (развернулись) и дальнейшее его увеличение не приведет уже к изменению намагниченности. При уменьшении внешнего поля намагниченность не следует по той же кривой, а уменьшается медленнее (рис. 5.12), данное явление называют *гистерезисом*. При обращении  $H$  в ноль, намагниченность не обращается в ноль, его величина (отрезок  $Ob$  на рис. 5.12) называется *остаточной намагниченностью*. Образец становится постоянным магнитом. Намагничивание обращается в ноль при приложении к образцу некоторого внешнего поля в противоположном первоначальному направлению (отрезок  $Oc$  на рис. 5.12). Его величина называется *коэрцитивной силой*. При увеличении поля в обратном направлении намагниченность опять выходит на насыщение (точка  $a'$ ) и подобное поведение уже повторяется при дальнейшем изменении поля. В результате изменения внешнего магнитного поля намагниченность вычерчивает замкнутую кривую (рис. 5.12), называемую *петлей гистерезиса*. По величине площади петли магнитные материалы делятся на *твердые* (большая площадь) и *мягкие* (площадь мала). Твердые материалы используются для изготовления постоянных магнитов, поскольку в них велики остаточная намагниченность и коэрцитивная сила. Работа по перемагничиванию образца пропорциональна площади петли, поэтому мягкие материалы используют для изготовления сердечников трансформаторов (см. ниже), генераторов, электродвигателей и т.д.

**Трансформатор** представляет собой сердечник из ферромагнетика, на котором намотаны катушки (две или более) индуктивности (рис 5.13). Одна из катушек является *первичной* и соединяется с источником переменного напряжения, другая (*вторичная*) соединяется с цепью (рис. 5.14), в которой предполагается потребление электрической энергии («нагрузка»).

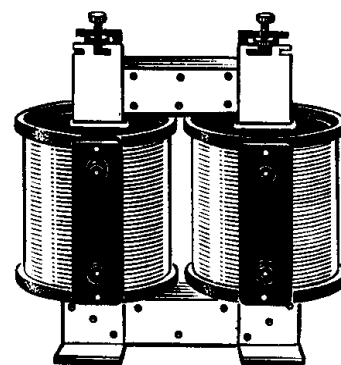


рис. 5.13

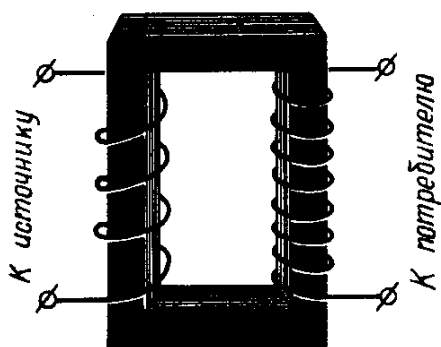


рис. 5.14

катушки к источнику напряжения в сердечнике возникает меняющееся во времени магнитное поле (см. задачу 6 в пособии по уравнениям Максвелла). Это поле, в свою очередь, будет создавать меняющийся во времени поток магнитной индукции  $\Phi$ . Так как магнитная проницаемость ферромагнетиков очень велика, то можно считать, что весь поток магнитной индукции сосредоточен внутри сердечника. Согласно

закону электромагнитной индукции (4.17) в каждом витке как первичной, так и вторичной обмотке катушки индуктивности при этом возникает одна и та же э.д.с.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Например, если  $\Phi(t) = \Phi_0 \cos(\omega t)$ , то  $\varepsilon(t) = \omega \Phi_0 \sin(\omega t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$ . В обмотке из  $n$  витков э.д.с. будет составлять  $n\varepsilon$ . Пусть в первичной обмотке имеется  $n_1$  витков, а во вторичной –  $n_2$ . Тогда отношение напряжений на витках первичной и вторичной обмоток равно

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{-\varepsilon_1}{-\varepsilon_2} = \frac{n_1\varepsilon(t)}{n_2\varepsilon(t)} = \frac{n_1}{n_2} = K \quad (5.19)$$

и называется *коэффициентом трансформации*. При  $K > 1$  трансформатор называется *понижающим*, при  $K < 1$  – *повышающим*.

При подключении вторичной обмотки к нагрузке напряжение на ней вырасти не может, так как в силу (5.19) не может вырасти напряжение на первичной обмотке (оно равно э.д.с. источника, к которому подключена эта обмотка). Следовательно, поток магнитной индукции в сердечнике будет один и тот же до и после подключения нагрузки

$$n_1\vec{I}_1 + n_2\vec{I}_2 = n_1\vec{I}_{10} \quad (5.20)$$

где  $\vec{I}_{10}$  – ток *холостого хода* (т.е. ток в первичной обмотке до подключения вторичной обмотки к нагрузке). Значок вектора подразумевает не пространственное направление, а фазу колебаний (см. векторные диаграммы). При написании данного соотношения пренебрегается рассеянием магнитного потока в воздухе. Имеем

$$\vec{I}_1 = \vec{I}_0 + \Delta\vec{I}_1 = \vec{I}_0 - \frac{n_2}{n_1}\vec{I}_2$$

Соотношение между токами  $\Delta\vec{I}_1$  и  $\vec{I}_2$  можно получить и из результатов решения задачи 6 пособия по уравнениям Максвелла ( $B \propto \mu nI$ )

$$\frac{-\Delta I_1}{I_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{K} \quad (5.21)$$

поскольку индукция внутри сердечника и его магнитная восприимчивость одна и та же для обеих обмоток, а также из того, что потоки магнитной индукции от токов  $\Delta\vec{I}_1$  и  $\vec{I}_2$  должны компенсировать друг друга (5.20). В хорошо сконструированных трансформаторах  $I_0 = (0.01-0.1)I_1$ , поэтому из соотношений (5.19), (5.21) для модулей токов  $I_1$  и  $I_2$  имеем (в реальных устройствах есть еще потери на активное сопротивление обмоток, так что (5.19) также выполняется приближенно)

$$U_1 I_1 \approx U_2 I_2 \quad (5.22)$$



Изменение мощности потребления нагрузки, т.е. мощности потребления во вторичной обмотке, будет происходить за счет увеличения тока вторичной, а, следовательно, в силу (5.21), и первичной обмоток.

Впервые трансформаторы использовались в 1878 г. Яблочковым П.Н. для питания изобретенных им «*электрических свечей*» (ламп освещения). Используемые им сердечники были незамкнуты, замкнутые сердечники появляются позже (1884). Дальнейшее развитие идей трансформации и усовершенствование трансформаторов в нашей стране проводилось Усагиным И.Ф.

**Токи Фуко.** При наличии меняющегося во времени потока магнитной индукции в проводниках согласно закону электромагнитной индукции должны возбуждаться индукционные токи, называемые *вихревыми токами* или *токами Фуко*. Поскольку сопротивление проводников мало, то эти токи могут достигать больших величин. Этот эффект широко используется в технике.

При движении проводника возникающие индукционные токи согласно правилу Ленца будут приводить к его торможению. Прикрепление к оси вращения какого-либо устройства, например к стрелкам приборов, пластинки, помещаемой в магнитное поле (рис. 5.15), будет приводить к быстрому его переходу в положение равновесия.

Инициирование токов Фуко большой величины будет приводить к нагреву и плавлению проводников, что используется, соответственно, для эффективного обезгаживания внутренних частей вакуумных приборов и плавления с высокой степенью чистоты.

Возникающие токи Фуко препятствуют проникновению переменных электрических и магнитных полей в проводящие среды. Это явление называется *скин-эффектом* или *поверхностным эффектом*. Пусть циклическая частота отмеченных полей (см. пособие по волновым явлениям) равна  $\omega$ . Амплитуды полей меняются с глубиной  $z$  как  $\exp(-\gamma z)$ , где  $\gamma$  характеризует глубину, на которой амплитуды полей уменьшаются в  $e$  раз, и зависит от конкретной геометрии проводника и вида волны. Ее можно оценить величиной, справедливой для случая распространения плоской электромагнитной волны в однородном проводящем полупространстве

$$\gamma \approx \sqrt{\frac{\mu_0 \mu \sigma \omega}{2}}$$

$\mu_0$  – магнитная постоянная,  $\mu$ ,  $\sigma$  – магнитная проницаемость и удельная проводимость среды. Поверхностный слой такой глубины называется *скин-*

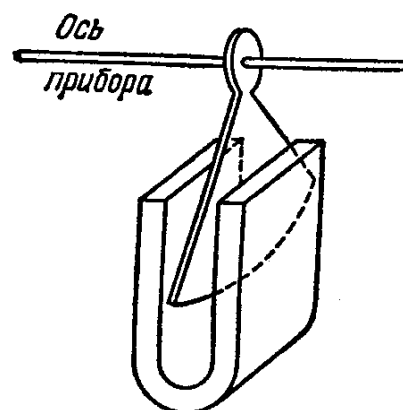


рис. 5.15

*слоем*. Таким образом, в высокочастотных полях внутренняя часть проводников оказывается бесполезной, поэтому проводники изготавливают в виде трубок.


Индукция токов Фуко в сердечниках генераторов тока и трансформаторов приводило бы к большим потерям электрической энергии, поэтому ферромагнитные сердечники набираются из тонких пластин (поверхность которых перпендикулярна индуцируемому току), разделенных изолирующими прослойками, что приводит к существенному подавлению вихревых токов. Как правило, ферриты являются полупроводниками с большим электрическим сопротивлением, поэтому ферритовые сердечники могут быть сплошными.

**Приложение 1****Аналогия между электрическими и механическими колебаниями**

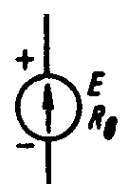
<i>Электрические колебания</i>	<i>Механические колебания</i>
Индуктивность $L$	Масса $m$
Энергия магнитного поля катушки $LI^2/2$	Кинетическая энергия $mv_x^2/2$
Сила тока $I = \dot{q} = \frac{dq}{dt}$	Скорость $v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$
Заряд $q$	Координата $x$
Энергия электрического поля конденсатора $q^2/2C$	Потенциальная энергия $kx^2/2$
Обратная величина емкости $1/C$	Жесткость пружины $k$
Скорость изменения силы тока $\dot{I} = \frac{dI}{dt}$	Ускорение $a = \dot{v}_x = \frac{dv}{dt} = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$

**Приложение 2****Основные обозначения элементов электрических цепей**

  $R$  – сопротивление (резистор)


  $C$  – конденсатор


  $L$  – катушка индуктивности

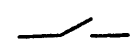
 – (источник) э.д.с. (напряжения)  $E$  (или  $\varepsilon$ ) с внутренним сопротивлением  $R_0$  (или  $r$ ).  
Используется также символ (« $\leftarrow$ » слева, « $\rightarrow$ » справа)




 – источник тока  $J$


 – пересечение проводов (узел). В поставленной точке есть соединение проводов

 – прохождение провода один над другим без пересечения. В точке пересечения нет соединения проводов

 – ключ (устройство для замыкания или размыкания цепи)

 – вольтметр (устройство для измерения напряжения)

 – амперметр или гальванометр (устройство для измерения тока).

 – лампа (осветительная)



– реостат



– изменяющееся сопротивление



– изменяющаяся емкость



– изменяющаяся индуктивность



– нелинейный резистор



– нелинейная емкость (вариконд)



– нелинейный индуктивный элемент (например, индуктивная катушка с обмоткой, намотанной на замкнутый сердечник из ферромагнитного материала, для которого зависимость магнитного потока в сердечнике от протекающего по обмотке тока нелинейна)



– терморезисторы (резисторы, сопротивление которых сильно зависит от температуры). Подразделяются на термисторы (темп. коэф. отрицательный) и позисторы (положительный)



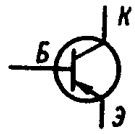
– диод



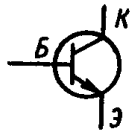
– туннельный диод



– фотодиод (диод, обратный ток  $p$ - $n$  перехода которого зависит от освещенности перехода)



– транзистор биполярный (*p-n-p*-типа). Первый вывод (от первой *p*-области) называется коллектором, второй вывод (от второй *p*-области) называется эмитерром, третий вывод (от *n*-области) – базой



– транзистор биполярный (*n-p-n*-типа)



– транзистор полевой *n*-типа. В полупроводнике *n*-типа создается небольшая *p*-область, соединенной с электродом (затвор). У *n*-области имеется два электрода – исток и сток. С помощью затвора создается электрическое поле в *n*-области, примыкающей к *p*-области. Это поле влияет на распределение в ней основных носителей (электронов)



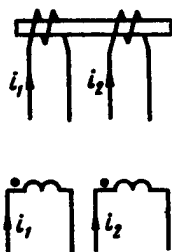
– транзистор полевой *p*-типа



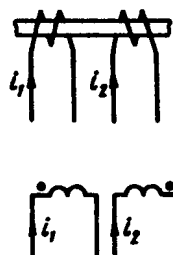
– триод



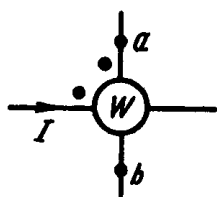
– трансформатор



– магнитосвязанные (поток одной из катушек пронизывает другие и наводит в них э.д.с. взаимной индукции) катушки индуктивности. Согласное включение. Пояснение включения на верхнем рисунке



– магнитосвязанные (поток одной из катушек пронизывает другие и наводит в них э.д.с. взаимной индукции) катушки индуктивности. Встречное включение. Пояснение включения на верхнем рисунке



– измеритель мощности. Имеет две катушки – подвижную и неподвижную. Подвижная катушка, выполненная из очень тонкого провода, имеет практически чисто активное сопротивление и называется параллельной обмоткой (на рисунке расположена вертикально). Ее включают параллельно участку цепи, подобно вольтметру. Жестко закрепленная со стрелкой (указателем), она может

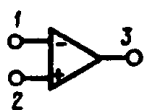
вращаться в магнитном поле, создаваемом неподвижной катушкой. Последняя выполняется из довольно толстого провода, имеет очень малое активное сопротивление и называется последовательной обмоткой. Ее включают последовательно участку цепи, подобно амперметру (на рисунке расположена горизонтально). На концах одноименных зажимов обмоток (например, у начала обмоток) принято ставить точки. Напряжение на параллельной обмотке берут равным разности потенциалов между ее концом, имеющим точку (точка *a*), и концом, не имеющим точки (точка *b*). Предполагается, что ток *I* втекает в конец последовательной обмотки, у которого поставлена точка



– управляемый источник тока. Существуют два типа идеализированных источников тока: источник тока, управляемый напряжением и источник тока, управляемый током



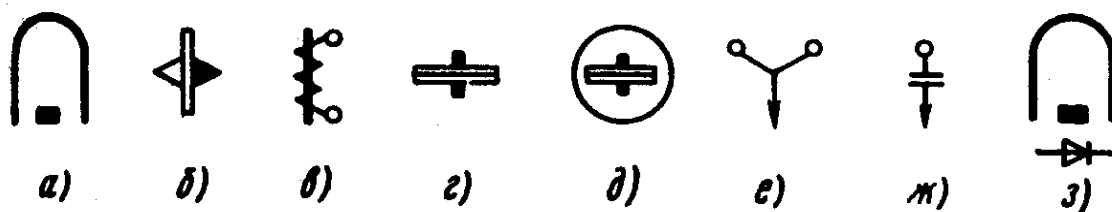
– управляемый источник напряжения. Существуют два типа идеализированных источников напряжения: источник напряжения, управляемый током и источник напряжения, управляемый



– операционный усилитель (ОУ). Имеет очень большое входное сопротивление, очень малое выходное сопротивление и очень большой коэффициент усиления  $k$  ( $10^4$ - $10^5$ ). Обычно имеет восемь выводов: два входных или управляющих (1, 2), один

выходной (3), один заземленный (0), два вывода для источника питания и два для регулировки. Четыре последних вывода на схемах не показывают, обычно изображают в виде треугольника с тремя выводами 1, 2, 3. Входное напряжение  $U_{\text{вх}} = \varphi_1 - \varphi_2$  (при использовании одного входа и заземления другого  $U_{\text{вх}} = \varphi_1$ ). Выходное напряжение равно разности потенциалов между точкой 3 и 0:  $U_{\text{вых}} = \varphi_3 - \varphi_0 = \varphi_3$ . Оно в  $k$  раз больше входного. Значение коэффициента усиления  $k$  записывают рядом с ОУ или внутри его

Несинусоидальные токи и напряжения измеряют амперметры и вольтметры различных систем: приборы электромагнитной, электродинамической и тепловой систем реагируют на действующее значение, магнитоэлектрические системы с выпрямителем – на среднее по модулю значение величины, магнитоэлектрические без выпрямителя – на постоянную составляющую, амплитудные электронные вольтметры – на максимальное значение функции. На лицевой стороне измерительного прибора всегда имеется условный значок, характеризующий систему прибора. Например,



а – магнитоэлектрическая с подвижной рамкой

б - магнитоэлектрическая с подвижным магнитом

в – электромагнитная

г – электродинамическая

д – ферродинамическая

е – тепловая

ж – электростатическая

з – магнитоэлектрическая с выпрямителем



### Примеры решения задач

1. К источнику с постоянной э.д.с.  $\varepsilon$  подключают катушку индуктивности  $L$ . Найти зависимость тока в цепи от времени. Рассмотреть случаи нулевого и ненулевого внутреннего сопротивления источника.

**Ответ:** а)  $I(t) = \frac{\varepsilon t}{L}$ , б)  $I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \right)$ .

**Решение.** а) Если внутреннее сопротивление источника равно нулю, то второе правило Кирхгофа для цепи имеет вид

$$\varepsilon = L \frac{dI}{dt}$$

Интегрируя по времени данное соотношение, получаем

$$I(t) = \frac{\varepsilon t}{L}.$$

Постоянная интегрирования равна нулю, поскольку ток в начальный момент времени (в момент подключения катушки к э.д.с.) равен нулю. Сила тока линейно растет со временем и не ограничена. Мощность, поглощаемая катушкой из цепи, аккумулируется в магнитном поле катушки, энергия магнитного поля непрерывно растет

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{\varepsilon^2 t^2}{2L}.$$

В реальном случае сила тока будет ограничена по времени, поскольку внутреннее сопротивление источника и активное сопротивление катушки отличны от нуля.

б) При отличном от нуля внутреннем сопротивлении источника  $r$  второе правило Кирхгофа для цепи имеет вид

$$\varepsilon = L \frac{dI}{dt} + rI \tag{1}$$

Поскольку

$$\frac{d}{dt} \exp(at) = a \exp(at)$$

то при решении нашего уравнения зависимость силы тока от времени можно искать в виде

$$I(t) = A(t) \exp\left(-\frac{rt}{L}\right)$$

Тогда применяя правило дифференцирования произведения, получаем для функции  $A(t)$  уравнение

$$\frac{d}{dt} A(t) = \frac{\varepsilon}{L} \exp\left(\frac{rt}{L}\right)$$

Интегрируя, получаем

$$A(t) = \frac{\varepsilon}{r} \exp\left(\frac{rt}{L}\right) + B$$

где  $B$  – постоянная интегрирования. Подставляя  $A(t)$  в соотношение для  $I(t)$ , получаем

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{r} + B \exp\left(-\frac{rt}{L}\right)$$

Постоянная интегрирования определяется из условия равенства тока нулю в момент включения

$$B = -\frac{\varepsilon}{r}$$

Окончательно получаем

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{r} \left(1 - \exp\left(-\frac{rt}{L}\right)\right)$$

Теперь сила тока уже не стремится к бесконечности, а ограничена величиной  $\varepsilon/r$ . Отметим, что эту величину можно было сразу определить из нашего исходного уравнения (1), если в нем удалить первое слагаемое правой части, которое в стационарном режиме должно обратиться в ноль.

2. Число витков вторичной обмотки трансформатора вдвое больше числа витков первичной обмотки. Активное сопротивление первичной обмотки равно  $R_1 = 20$  Ом, а ее индуктивное сопротивление –  $Z_{1L} = 200$  Ом. На первичную обмотку подали переменное напряжение  $U_1 = 100$  В. Определите напряжение на вторичной обмотке в режиме холостого хода. Как изменится напряжение на вторичной обмотке, если сердечник трансформатора заменить другим того же размера, но сделанным из материала с магнитной проницаемостью в  $n = 10$  раз меньшей? Рассеянием магнитного потока и потерями в сердечнике пренебречь.

$$\text{Ответ: } U_2 = \frac{2U_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_1}{Z_{1L}}\right)^2}} \approx 199 \text{ В}, \quad U_2' = \frac{2U_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{nR_1}{Z_{1L}}\right)^2}} \approx 140 \text{ В}.$$

**Решение.** Если бы не было потерь на активном сопротивлении первичной обмотки, напряжение на вторичной обмотке было бы равно

$$U_2 = 2U_1$$

Вследствие же потерь на нагревание первичной обмотки напряжение на вторичной обмотке определяется формулой

$$U_2 = 2U_{1L}$$

где  $U_{1L} = \omega L_1 I_1$ . Напряжение на первичной обмотке  $U_1$  определяется формулой

$$U_1 = \sqrt{U_{1R}^2 + U_{1L}^2}$$

Следовательно,

$$\frac{U_{1L}}{U_1} = \frac{X_{1L}}{\sqrt{Z_{1L}^2 + R_1^2}},$$

$$U_{1L} = \frac{U_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_1}{Z_{1L}}\right)^2}}$$

и

$$U_2 = \frac{2U_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_1}{Z_{1L}}\right)^2}} \approx 199 \text{ В.}$$

При замене сердечника индуктивное сопротивление уменьшается в  $n$  раз:

$$Z'_{1L} = Z_{1L} / n = 20 \text{ Ом,}$$

поскольку магнитная индукция уменьшается в  $n$  раз (см. задачу 6 пособия по уравнениям Максвелла), и, как следствие, в  $n$  раз уменьшаются поток магнитной индукции и э.д.с. электромагнитной индукции. В этом случае напряжение на вторичной обмотке станет равным

$$U'_2 = \frac{2U_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_1}{Z'_{1L}}\right)^2}} \approx 140 \text{ В.}$$

Таким образом, необходимым условием для нормальной работы трансформатора является выполнение соотношения  $Z_L \gg R$ .

3. Трансформатор имеет две катушки. Отношение числа витков  $n_1$  в первой катушке к числу витков  $n_2$  во второй катушке равно  $k = 0.115$ . Ток холостого хода при напряжении  $U_1 = 1$  В на первой катушке  $I_0 = 3.5$  мА. Электрическое сопротивление  $r_1$  провода первой катушки равно 9 Ом, сопротивление  $r_2$  провода второй катушки равно 730 Ом. Каково электрическое сопротивление  $R_2$  нагрузки в цепи второй катушки, если сила тока  $I_2$  во вторичной цепи 5 мА? Какова сила тока  $I_1$  при этом в первичной цепи? Напряжение на концах первичной катушки  $U_1$  равно 1.5 В.

**Ответ:**  $R_2 = 1.2 \cdot 10^3$  Ом,  $I_1 \approx 4.7 \cdot 10^{-2}$  А.

**Решение.** При подключении нагрузки  $R_2$  к выводам второй обмотки во вторичной цепи возникают колебания силы тока с амплитудой  $I_2$ . По правилу Ленца индукционный ток во второй обмотке создает магнитный поток, компенсирующий те изменения магнитного потока, которые вызывают возникновение э.д.с. индукции во второй обмотке. Уменьшение изменений магнитного потока вызывает уменьшение э.д.с. самоиндукции в первой обмотке и возрастание амплитуды колебаний силы тока в ней на такую величину  $\Delta I_1$ , при которой амплитуда колебаний магнитного потока восстанавливается до первоначального значения. Обозначим индуктивность одного витка катушки трансформатора  $L$ , тогда изменение магнитного потока через него равно

$$\Delta\Phi = L\Delta I$$

Условие работы трансформатора в режиме нагрузки

$$\Delta\Phi_1 = -\Delta\Phi_2, \quad |n_1 L \Delta I_1| = |n_2 L \Delta I_2|, \quad \frac{\Delta I_2}{\Delta I_1} = \frac{n_1}{n_2} = k$$

$$\Delta I_1 = I_1 - I_0, \quad \Delta I_2 = I_2, \quad \Delta I_1 = \frac{I_2}{k}$$

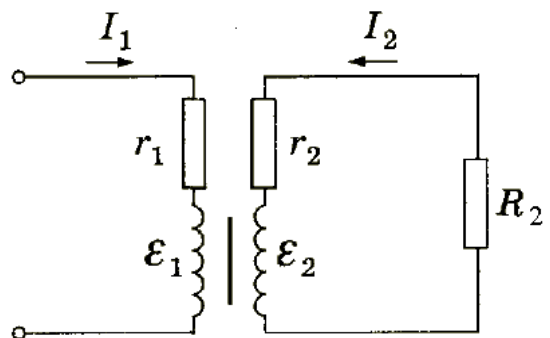
Если  $I_0 \ll I_1$ , (см. раздел трансформатор) то выполняется приближенное равенство:

$$I_1 \approx \Delta I_1.$$

В этом случае

$$I_1 = \frac{I_2}{k} \approx 4.35 \cdot 10^{-2} \text{ А.}$$

Для нахождения сопротивления нагрузки  $R_2$  представим эквивалентную электрическую схему трансформатора (см. рис.), где  $r_1$  и  $r_2$  – сопротивления проводов первой и второй катушек,  $R_2$  – сопротивление внешней нагрузки в цепи второй катушки,  $\varepsilon_1$  – э.д.с. самоиндукции в первой катушке,  $\varepsilon_2$  – э.д.с. самоиндукции во второй катушке.



По известным значениям силы тока в первичной цепи и напряжения  $U_1$  на концах катушки найдем э.д.с. самоиндукции  $U_{1L}$  в первичной цепи:

$$I_1 = \frac{U_1 - \varepsilon_1}{r_1}, \quad \varepsilon_1 = U_1 - I_1 r_1 = 1.11 \text{ В.}$$

Так как через первую и вторую катушки проходит один и тот же магнитный поток, его изменения вызывают одинаковые значения э.д.с. индукции  $\varepsilon$  в каждом витке первой и второй катушек. Поэтому отношение э.д.с. самоиндукции в первой катушке  $\varepsilon_1$  к э.д.с. индукции во второй катушке  $\varepsilon_2$  равно отношению числа витков  $n_1$  в первой катушке к числу витков  $n_2$  во второй катушке (см. (5.19)):

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{n_1 \varepsilon}{n_2 \varepsilon} = \frac{n_1}{n_2} = k.$$

Найдем э.д.с. индукции  $\varepsilon_2$  во второй катушке:

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{k} = 9.65 \text{ В.}$$

Сила тока  $I_2$  во второй катушке определяется из уравнения:

$$I_2 = \frac{\varepsilon_2}{R_2 + r_2}.$$

Отсюда следует:

$$R_2 = \frac{\varepsilon_2}{I_2} - r_2 = 1200 \text{ Ом.}$$

Э.д.с. самоиндукции в первой катушке равна по модулю напряжению на индуктивном сопротивлении:

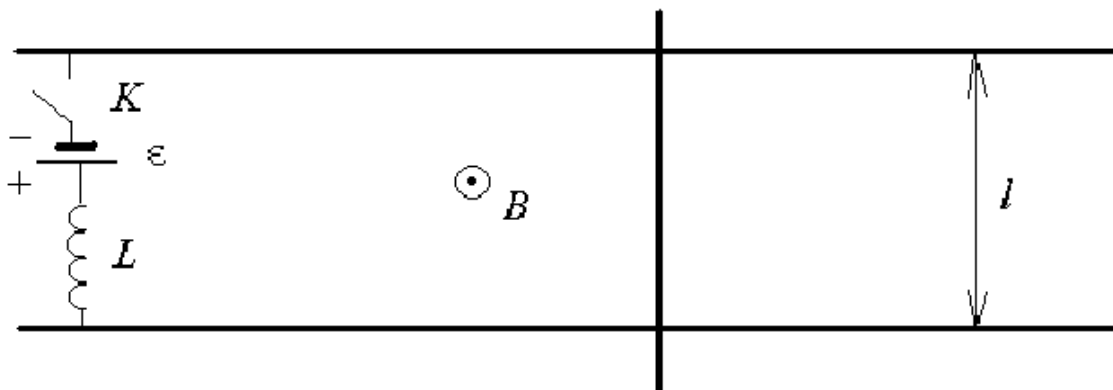
$$|\varepsilon_1| = |U_{1L}|.$$

Так как это напряжение примерно равно 1 В, то значение холостого тока  $I_0$  можно считать примерно равным данному в условии задачи значению 3.5 мА. Отсюда более точное значение силы тока в первой катушке:

$$I_1 = \Delta I_1 + I_0 \approx 4.7 \cdot 10^{-2} \text{ А.}$$

4. Горизонтально расположенные металлические рельсы, расстояние между которыми равно  $l$ , находятся в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией  $B$  (см. рисунок, вид сверху). К рельсам подсоединены батарея с э.д.с.  $\varepsilon$  и индуктивность  $L$ . На рельсах лежит металлическая планка массы  $m$ , которая может свободно (без трения) передвигаться, оставаясь все время перпендикулярной к ним. Рельсы и планка не имеют электрического сопротивления. Определить расстояние  $d$ , пройденное планкой после замыкания ключа  $K$ , к моменту времени, когда она впервые достигла максимального ускорения.

**Ответ:**  $d = \frac{\sqrt{mL\varepsilon}}{(Bl)^2} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right).$



**Решение.** Согласно второму правилу Кирхгофа уравнение для силы тока в цепи имеет вид:

$$LI' = \varepsilon - \varepsilon_{\text{инд}} = \varepsilon - Bvl \quad (1)$$

где  $v$  – скорость движения планки. Согласно закону Ньютона уравнение движения планки имеет вид:

$$mw = F_A = BIl$$

где  $w$  – ускорение планки,  $F_A$  – сила Ампера. Продифференцируем уравнение (1) по времени и вместо ускорения подставим выражение из последнего соотношения, получим:

$$LI'' = -Bwl = -\frac{(Bl)^2}{m} I$$

т.е. мы получили уравнение гармонических колебаний для силы тока в цепи. Поскольку в начальный момент времени сила тока равна нулю, то решение данного уравнения имеет вид:

$$I = I_0 \sin(\omega t), \quad \text{где } \omega^2 = \frac{(Bl)^2}{mL}$$

Найдем из данного соотношения производную от тока в начальный момент времени и подставим в него выражение, получающееся (скорость планки  $v$  в начальный момент времени равна нулю) из уравнения (1):

$$I'(t=0) = I_0 \omega = \frac{\varepsilon}{L}$$

Из этого уравнения определяем  $I_0$ . Окончательно получаем зависимость тока от времени:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{\omega L} \sin(\omega t)$$

Выражение для зависимости скорости от времени получаем теперь из уравнения (1):

$$v(t) = \frac{\varepsilon}{Bl} (1 - \cos(\omega t)) \quad (2)$$

Для ускорения планки имеем:

$$w(t) = \frac{\varepsilon \omega}{Bl} \sin(\omega t)$$

Видно, что ускорение становится максимальным в момент времени, равный четвертьпериоду колебаний тока:

$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} = \frac{\pi\sqrt{mL}}{2Bl}$$

Из зависимости (2) следует, что движение планки представляет собой наложение движения с постоянной скоростью и гармонических колебаний, следовательно, для зависимости пройденного пути от времени получаем

$$x(t) = \frac{\varepsilon}{Bl} \left( t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right)$$

Итак, расстояние, пройденное планкой к моменту времени, когда впервые планка достигает максимального ускорения, равно

$$d = x(\Delta t) = \frac{\varepsilon \sqrt{mL}}{(Bl)^2} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

5. Конденсатор емкостью  $C = 100$  мкФ, катушка индуктивностью  $L = 10$  мГн и резистор с активным сопротивлением  $R = 10$  кОм соединены параллельно. Найдите значения амплитуд колебаний силы тока в общей цепи и в цепи катушки при наступлении резонанса, если амплитуда колебаний переменного напряжения  $U_m = 100$  В. Активное сопротивление катушки пренебрежимо мало.

**Ответ:**  $I_m = \frac{U_m}{R} = 1.0 \cdot 10^{-2}$  А,  $I_L = \sqrt{\frac{C}{L}} U_m = 10$  А.

**Решение.** При параллельном соединении резистора, конденсатора и катушки (рис. 1) напряжение на всех этих элементах электрической цепи изменяется по одному и тому же закону:

$$u(t) = U_m \cos \omega t$$

С учетом возникновения сдвига фазы между током и напряжением на реактивных элементах электрической цепи сила тока в ветвях определяется формулами:

$$i_R(t) = \frac{U_m}{R} \cos \omega t \quad i_C(t) = \omega C U_m \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad i_L(t) = \frac{U_m}{\omega L} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

Полный ток в цепи в произвольный момент времени равен сумме токов в параллельных ветвях:

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t) + i_L(t).$$

Для нахождения полного тока построим векторную диаграмму (рис. 2)

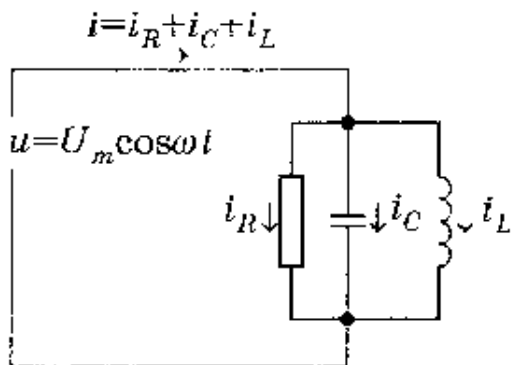


рис. 1

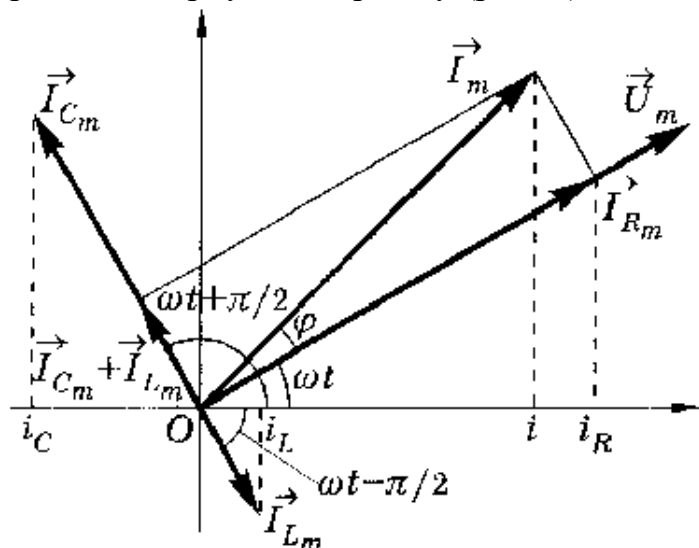


рис. 2

Из нее видно, что суммарный ток можно найти по формуле

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

где  $I_m$  – амплитуда колебаний тока в общей цепи,  $\varphi$  – сдвиг фазы между током и напряжением. Видно, что амплитуда тока имеет вид:

$$I_m = \sqrt{I_{Rm}^2 + (I_{Cm} - I_{Lm})^2} = U_m \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \quad (1)$$

Действующие значения силы тока  $I$  и напряжения  $U$  связаны аналогичным соотношением. Из векторной диаграммы можно найти сдвиг фаз между колебаниями силы тока и напряжения:

$$\cos \varphi = \frac{I_{Rm}}{I_m} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

Полное сопротивление электрической цепи определяется выражением

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

При равенстве индуктивного и емкостного сопротивлений токи через катушку и конденсатор в любой момент времени равны друг другу по модулю и противоположны по направлению (находятся в противофазе), т.е.

$$\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (2)$$

Сумма токов  $i_L$  и  $i_C$  в этом случае равна нулю, а сила тока в общей цепи равна силе тока через активное сопротивление:

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t) + i_L(t) = i_R(t), \quad I_m = I_{Rm} = \frac{U_m}{R} \quad (3)$$

Этот же результат можно получить формально подстановкой выражения (2) в выражение (1).

При выполнении условия (2) полное сопротивление электрической цепи принимает максимальное значение  $Z = R$ . Максимальному значению полного сопротивления такой электрической цепи соответствует минимальное значение силы тока. Следовательно, при выполнении условия (2), т.е. при резонансе тока в колебательном контуре, сила тока в общей цепи минимальна.

Зависимость амплитуды колебаний силы тока от частоты приложенного напряжения при постоянной его амплитуде в общем участке цепи при параллельном соединении катушки, конденсатора и активного сопротивления представлена на рис. 3.

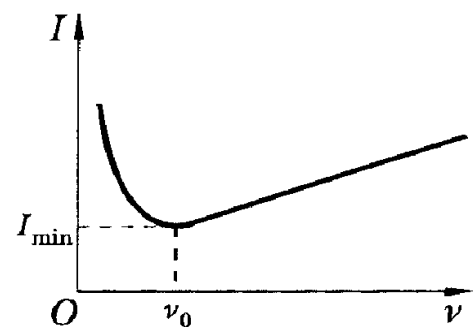


рис. 3



Из (2), (3) находим амплитуду колебаний силы тока в общей цепи

$$I_m = 10^{-2} \text{ А},$$

и резонансную частоту

$$\omega_0 = 10^3 \text{ с}^{-1}.$$

Амплитуда колебаний силы тока в цепи катушки т.о. равна

$$I_L = \frac{U_m}{\omega_0 L} = 10 \text{ А}.$$

6. На рисунке 1 приведена вольтамперная характеристика лампы накаливания, номинальное напряжение которой  $U_n = 220 \text{ В}$ , номинальная мощность  $P_n = 100 \text{ Вт}$ . Лампу подключают к сети переменного тока (220 В, 50 Гц) последовательно с конденсатором емкости  $C = 10 \text{ мкФ}$ . Определить силу тока в лампе и напряжение на ней. Считать, что в течение периода сетевого напряжения температура нити практически не меняется.

**Ответ:**  $U_n \approx 180 \text{ В}$ ,  $I_n \approx 0.4 \text{ А}$ .

**Решение.** Поскольку

температура нити в течение периода остается неизменной, в рабочей точке лампу можно считать обычным резистором. На рис. 2 приведена векторная диаграмма для цепи с последовательно соединенными резистором и конденсатором. Из диаграммы находим:

$$U_{0C}^2 + U_{0R}^2 = U_0^2$$

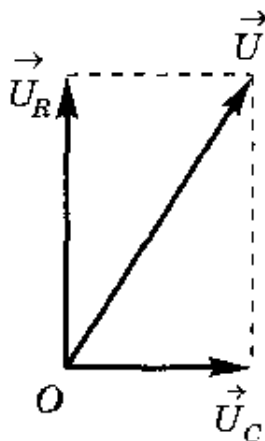


рис. 2

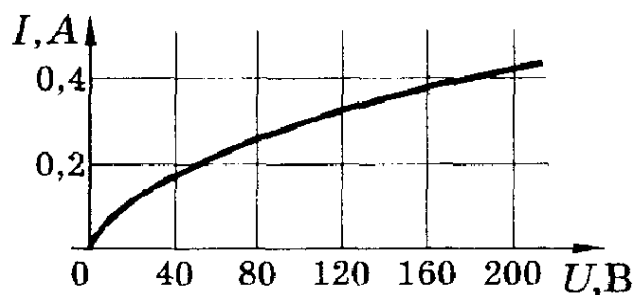


рис. 1

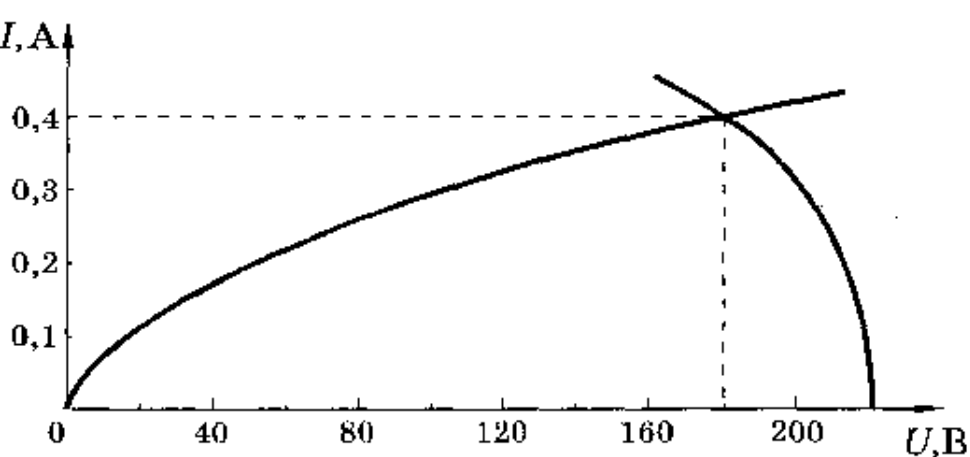


рис. 3

Связь между напряжением на  $U_{0R}$  лампе и током  $I$  через нее находим, используя

связь (5.9.3):  $U_{0C} = \frac{I_0}{\omega C}$

$$I_0 = \omega C \sqrt{U_0^2 - U_{0R}^2} = 3.14 \cdot 10^{-3} \sqrt{48400 - U_{0R}^2} \text{ А,}$$

Так же, как и в предыдущей задаче, действующие значения тока и напряжения связаны таким же соотношением (как и амплитудные). График зависимости действующего значения тока от действующего значения напряжения изображен вместе с ВАХ лампы на рис. 3. Точка пересечения кривых определяет искомые величины:  $U_l \approx 180 \text{ В}$ ,  $I_l \approx 0.4 \text{ А}$ .