Общеобразовательная школа №1189 им. И.В. Курчатова

Поверхностное натяжение

Составитель: Бойченко А.М.
Пособие по физике, 10 класс
поверхностное натяжение

Москва 2009

Оглавление

1. Поверхностное натяжение

Силы поверхностного натяжения стоят в стороне от фундаментальных сил природы, они сравнительно невелики и их проявления на первый взгляд незаметны. Тем не менее, их отсутствие сразу бросилось бы в глаза. Мы не могли бы использовать чернильные и шариковые ручки, даже под слабым дождиком мы промокали бы насквозь, нельзя было бы наблюдать радугу, бег жуков-водомерок по поверхности воды и т.д. Впрочем, и жизни на Земле в ее привычном виде не было бы: капиллярные явления играют определяющую роль в кровообращении человека и животных и питании растений.

Потенциальная энергия поверхностного натяжения. Рассмотрим атомы или молекулы жидкости вблизи ее поверхности раздела с газом. Как мы уже знаем (см. пособие по термодинамике, газовые законы), концентрация атомов или молекул жидкости существенно (обычно примерно в 10^3 раз) превышает концентрацию их в газе. Поэтому сила притяжения атомов или молекул поверхностного слоя со стороны атомов или молекул, находящихся внутри жидкости, существенно превосходит силу притяжения со стороны атомов или молекул газа. Равнодействующая межмолекулярных сил в поверхностном слое не равна нулю (как в объеме тела) и направлена внутрь той фазы, в которой сила сцепления больше. В силу этого характерное расстояние между атомами и молекулами в поверхностном слое превышает характерное расстояние между атомами и молекулами внутри объема. Для увеличения расстояния между ними требуется дополнительная энергия.

При увеличении поверхности жидкости возникают новые участки поверхностного слоя, средние расстояния между атомами или молекулами в этом случае увеличиваются при переходе их из глубины жидкости в поверхностный слой. Молекулярные силы при этом совершают отрицательную работу (т.е. увеличивается потенциальная энергия системы).

При выдувании мыльного пузыря поверхностная энергия увеличивается за счет работы сил давления воздуха в пузыре, поскольку для раздувания пузыря давление воздуха в нем должно быть больше атмосферного. Когда же, например, вода разливается по полу, поверхностная энергия увеличивается за счет работы сил тяжести. Работа по образованию новой поверхности затрачивается на преодоление сил межмолекулярного (межатомного) сцепления (*когезии*) при переходе молекул вещества из объема тела в поверхностный слой.

При уменьшении площади поверхности происходит уменьшение поверхностной энергии. Молекулярные силы при этом совершают положительную работу, поскольку расстояния между атомами или молекулами при их переходе из поверхностного слоя вглубь жидкости уменьшаются.

Итак, атомы или молекулы поверхностного слоя обладают избытком потенциальной энергии по сравнению с их потенциальной энергией внутри жидкости. Эта избыточная энергия называется *поверхностной энергией*. Чем больше поверхность, тем больше поверхностная энергия, поэтому поверхностную энергию принято характеризовать *коэффициентом поверхностного натяжения*

$$\sigma = \frac{U}{S} \qquad (1)$$

В состоянии равновесия поверхностная энергия принимает минимальное значение. Поэтому если нет других сил, то жидкость принимает форму шара. При наличии объемных сил (например, тяготения) чем меньше капля, тем ближе ее форма к шарообразной. При отсутствии тяготения (например, в состоянии невесомости в космическом корабле) шарообразную форму принимают не только отдельные капли, но и большие массы жидкости.

В общем случае поверхность раздела имеют не только системы жидкость-газ (ж-г), но и конденсированные системы (жидкости (ж), твердые тела (тт)): ж-ж, ж-тт, тт1-тт2. В общем случае *поверхностное натяжение* – это термодинамическая характеристика раздела двух фаз (тел), определяемая работой обратимого изотермического образования единицы площади этой поверхности. Можно сказать также, что поверхностное натяжение – мера некомпенсированности межмолекулярных сил в поверхностном (межфазном) слое, или избытка энергии в поверхностном слое по сравнению с энергией в объемах фаз.

Поверхностное натяжение на границе двух конденсированных фаз обычно называется *межфазным натяжением*.

Сила поверхностного натяжения. В случае жидкой поверхности поверхностное натяжение можно также рассматривать как силу, действующую на единицу длины контура поверхности и стремящуюся сократить поверхность до минимума при заданных объемах фаз. Какова величина этой силы?

Рассмотрим простейший опыт, демонстрирующий наличие силы поверхностного натяжения (рис. 1). Пусть имеется прямоугольный проволочный каркас, по которому может свободно скользить поперечная перекладина. Опустим каркас с перекладиной в мыльный раствор и вытащим его. Теперь у нас имеется каркас с мыльной пленкой. Если перекладина *AB* достаточно легкая, то под действием силы поверхностного натяжения, она начнет движение вверх. Чтобы перекладина оставалась в

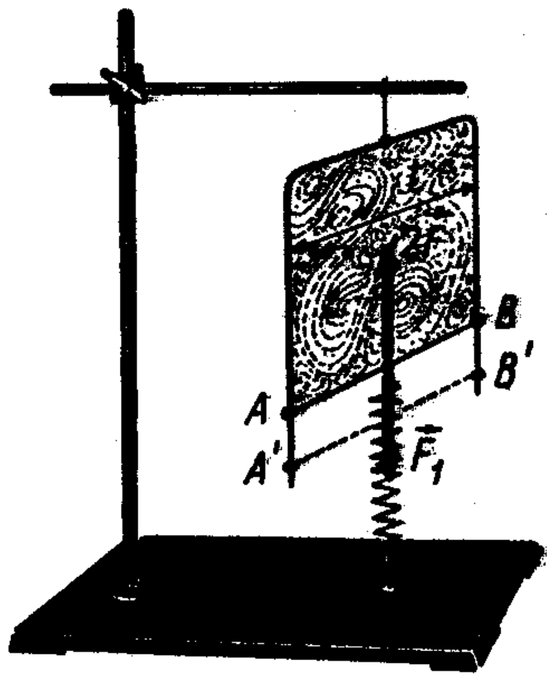


рис. 1

покое необходимо приложить некоторую силу F_1, действующую вниз. В случае мыльной пленки у нас имеется две границы раздела ж-г, каждая из которых характеризуется силой поверхностного натяжения F. Таким образом

$$F_1 = 2F$$

Пусть под действием силы F_1 поперечная планка равномерно сдвигается вниз на расстояние h, тогда эта сила совершит работу

$$A = F_1 h = 2Fh$$

С другой стороны, площадь рамки изменилась на Lh и поскольку у нас имеется две границы раздела ж-г, то согласно (1) поверхностная энергия изменилась на $2\sigma Lh$. Увеличение поверхностной энергии произошло за счет работы по перемещению перекладины в результате действия силы F_1, следовательно

$$2Fh = 2\sigma Lh$$

Окончательно имеем

$$F = \sigma L \qquad (2)$$

Итак, сила, действующая на границу раздела в виде отрезка длины L равна коэффициенту поверхностного натяжения умноженного на L и направлена перпендикулярно границе раздела. Если граница раздела не является прямолинейной, то нужно разбить ее на маленькие части, такие, что каждую из них приблизительно можно представить отрезком, после чего векторно просуммировать силы, действующие на каждый из отрезков.

Таким образом, коэффициент поверхностного натяжения представляет собой также силу, действующую на единицу длины границы раздела сред.

Линии контакта сред. При контакте или соприкосновении жидкости с поверхностью твердого тела или другой жидкости возникает явление, называемое *смачиванием*. Смачивание часто рассматривают как результат межмолекулярного взаимодействия в зоне контакта трех фаз (тел, сред). Мерой смачивания является *угол смачивания* (рис. 2), т.е. угол θ между смачиваемой

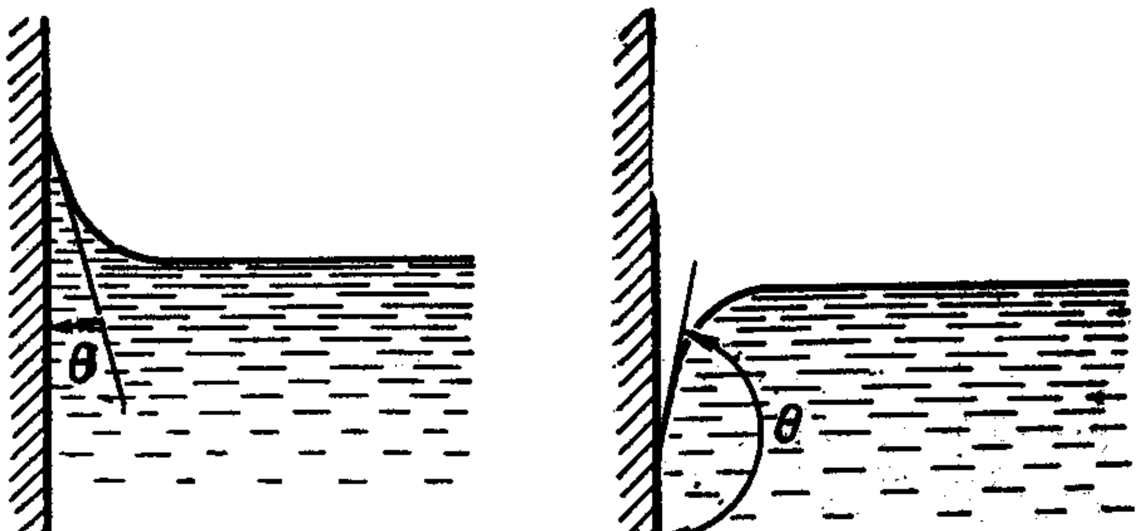


рис. 2

поверхностью и поверхностью на периметре смачивания. Этот угол зависит от соотношения сил сцепления молекул жидкости с молекулами или атомами смачиваемого тела (*адгезия*) и сил сцепления молекул жидкости между собой (*когезия*).

Следует отметить, однако, что во многих случаях, например, при соприкосновении жидких металлов с твердыми металлами, окислами, алмазом, графитом, смачивание обусловлено не столько межмолекулярным взаимодействием, сколько образованием химических соединений, твердых и жидких растворов, диффузионными процессами в поверхностном слое смачиваемого тела.

Поверхности раздела различных сред заканчиваются линиями их контакта. Поверхности раздела соприкасаются под определенными углами друг к другу. Углы, под которыми среды подходят друг к другу в линии контакта, определяются из условия равенства нулю векторной суммы, составленной из векторов, направление которых определяется касательными к линии раздела, а модули – соответствующими коэффициентами поверхностного натяжения. В случае контакта трех сред (рис. 3, контакт трех жидкостей, либо двух жидкостей и газа) условие равновесия линии контакта может выполняться, если

$$\sigma_{12} < \sigma_{23} + \sigma_{31}$$

Это условие выполняется, например, для капелек жира в супе. Для капелек нефти или бензина в воде данное условие не выполняется и происходит неограниченное растекание капли до тех пор, пока нефть или бензин либо покроют всю поверхность воды, либо толщина слоя не уменьшится до молекулярных размеров.

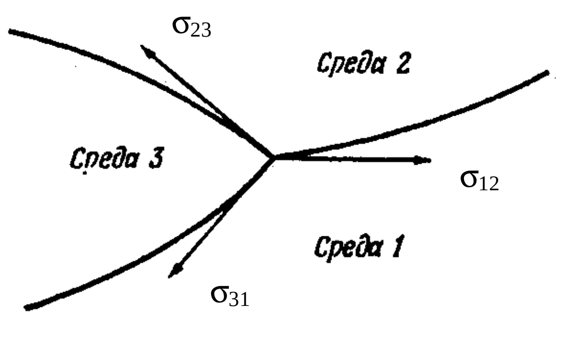


рис. 3

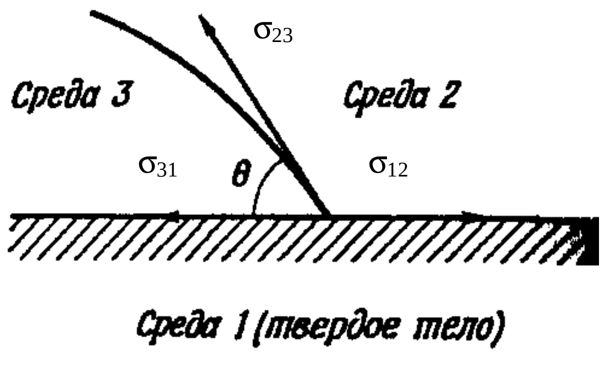


рис. 4

Если одна из сред твердая, то линия контакта может двигаться только вдоль твердой поверхности. В таком случае условие равновесия имеет вид

$$\sigma_{12} = \sigma_{31} + \sigma_{23}\cos\theta$$

(рис. 4, контакт твердого тела с двумя жидкостями или с жидкостью и газом вдоль плоской поверхности), θ – *угол смачивания* (широко употребляются также – *краевой угол*, *угол контакта*). Данное уравнение называется *уравнением Юнга*. На *лиофильной* поверхности жидкость растекается, т.е.

имеется частичное ($0^o < \theta < 90^o$) или полное ($\theta \to 0^o$) смачивание; на *лиофобной* – растекания не происходит ($\theta > 90^o$).

Теорема Лапласа. Почему растянутое резиновое кольцо стремится уменьшить свой радиус? Рассмотрим небольшой участок кольца AB (рис. 5).

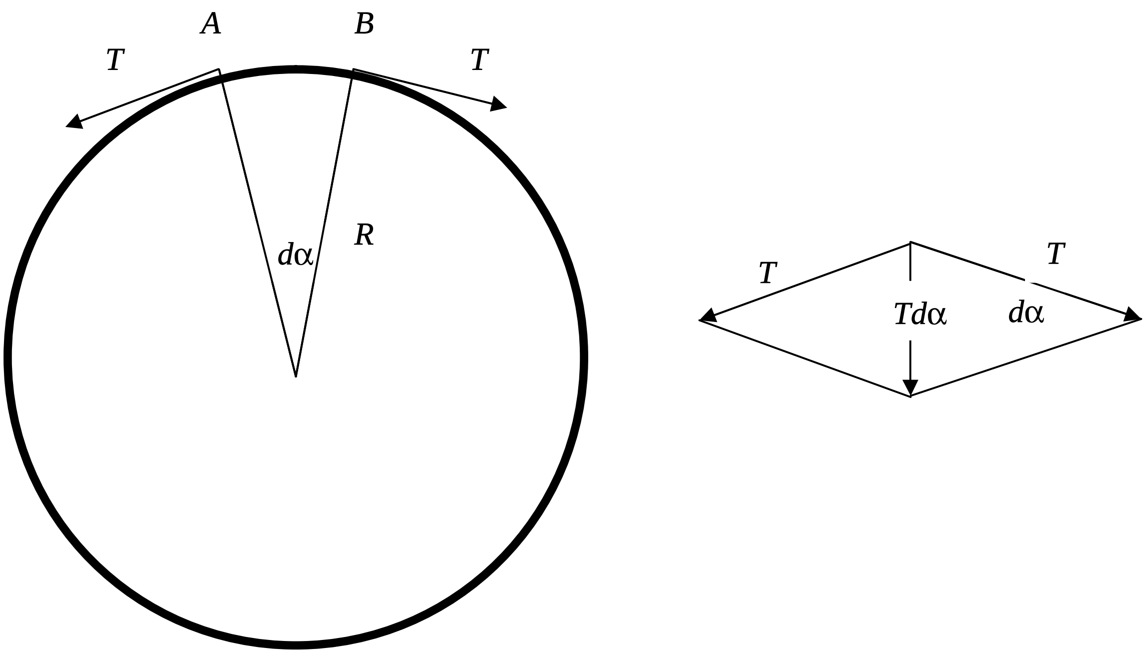


рис. 5

На концы данного участка со стороны кольца действуют силы (натяжения) T. Если участок представляет собой хорду окружности радиуса R, опирающуюся на малый угол $d\alpha$

$$d\alpha \approx |AB|/R \tag{3}$$

то суммарная сила, действующая на этот участок равна

$$T\sin(d\alpha) \approx Td\alpha \tag{4}$$

и направлена по радиусу внутрь кольца. Т.о. если растянутое кольцо предоставить самому себе, то оно стремится сжаться.

Рассмотрим теперь некоторый участок поверхности и рассечем его любыми двумя взаимно перпендикулярными плоскостями, проходящими через прямую, перпендикулярную к поверхности в произвольной выбранной точке этого участка (рис. 6, $\sigma = C$ – коэффициент поверхностного натяжения). Пересечения плоскостей с поверхностью показаны пунктирными линиями. Чем меньше будет выбраться этот участок, тем точнее можно представить эти линии пересечения как дуги некоторых окружностей R_1 и R_2. Данные R_1 и R_2 называются *радиусами кривизны* этих линий в рассматриваемой точке (см. также приложение 3). Рассечем теперь дополнительно рассматриваемый участок поверхности четырьмя плоскостями, причем каждая пара из четырех плоскостей равноотстоит от каждой из исходных взаимно перпендикулярных плоскостей на некотором небольшом расстоянии $ds_1/2$ ($ds_2/2$). Чем меньше участок поверхности, тем более линии пересечения четырех плоскостей с поверхностью напоминают прямоугольник. Согласно (2) и (4) на данную фигуру, близкую к прямоугольнику, действует результирующая сила

$$d\alpha \cdot \sigma ds_2 + d\beta \cdot \sigma ds_1$$

Чтобы рассматриваемый участок поверхности оставался в равновесии, в противоположном направлении должна действовать такая же (по модулю) сила. Если перепад давления при переходе через поверхность равен Δp, то сила, возникающая за счет этого перепада равна

$$\Delta p ds_2 ds_1$$

Если никаких других сил в задаче нет, то мы можем написать

$$d\alpha \cdot \sigma ds_2 + d\beta \cdot \sigma ds_1 = \Delta p ds_2 ds_1$$

Учитывая, что согласно (3)

$$d\alpha \approx ds_1/R_1$$

$$d\beta \approx ds_2/R_2$$

получаем, сокращая левую и правую части на отличный от нуля множитель ds_2ds_1

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (5)$$

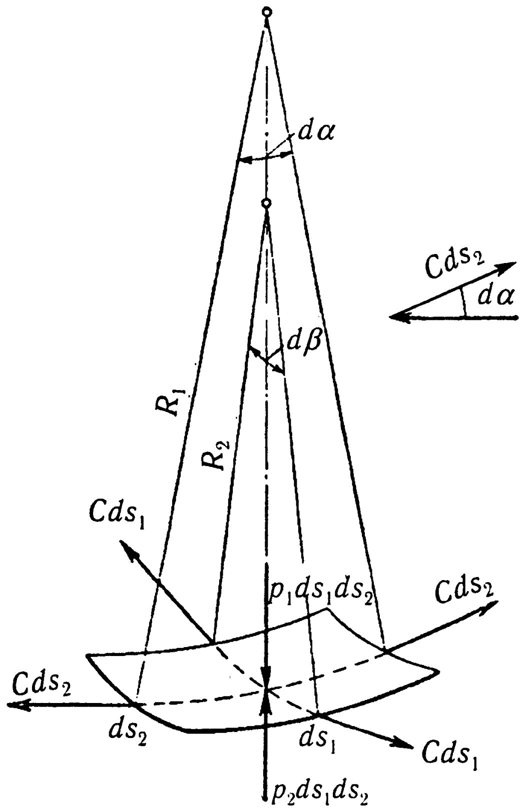


рис. 6

Данное соотношение называется *формулой Лапласа*.

2. Капиллярные явления

Поверхностные явления, возникающие при совместном действии молекулярных сил (поверхностного натяжения и смачивания) и внешних сил (например, силы тяжести), вызывающие искривление жидких поверхностей раздела, называются капиллярными явлениями.

Высота подъема столбика жидкости в капилляре. Если мы поместим трубку большого диаметра в жидкость, то уровень жидкости снаружи и внутри трубки будет одинаковым (уровень воды в сообщающихся сосудах одинаков). Если диаметр трубки будет малым (*капилляр*), уровни жидкости снаружи и внутри трубки будут разными. Рассмотрим, какая разность высот жидкости установится в капилляре при полном смачивании (угол смачивания равен нулю).

В этом случае силы поверхностного натяжения действуют вверх вдоль кромки воды (рис. 7). Кромка представляет собой окружность с радиусом равным внутреннему радиусу трубки r, следовательно, периметр кромки равен

$2\pi r$. Согласно (2) сила поверхностного натяжения, действующая вертикально вверх и подтягивающая вверх жидкость, равна

$$F_{\text{пов}} = 2\pi r\sigma \qquad (6)$$

Если высота столбика жидкости (над поверхностью воды снаружи) в капилляре равна h, то масса столбика равна $m = \rho V = \rho Sh = \rho\pi r^2 h$, где ρ – плотность жидкости, V – ее объем, S – площадь поперечного сечения капилляра. Сила поверхностного натяжения должна уравновешиваться силой тяжести, действующей на массу m. Получаем

$$2\pi r\sigma = \rho\pi r^2 hg$$

$$h = \frac{2\sigma}{\rho gr} \qquad (7)$$

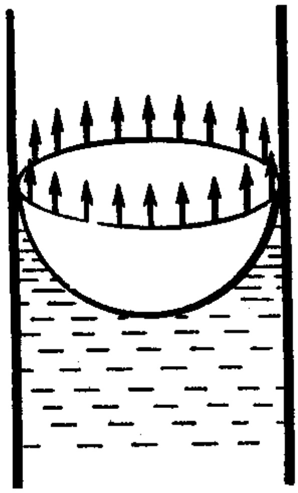


рис. 7

Если смачивание не полное, то проекция силы поверхностного натяжения на вертикальное направление будет уже не (6), а

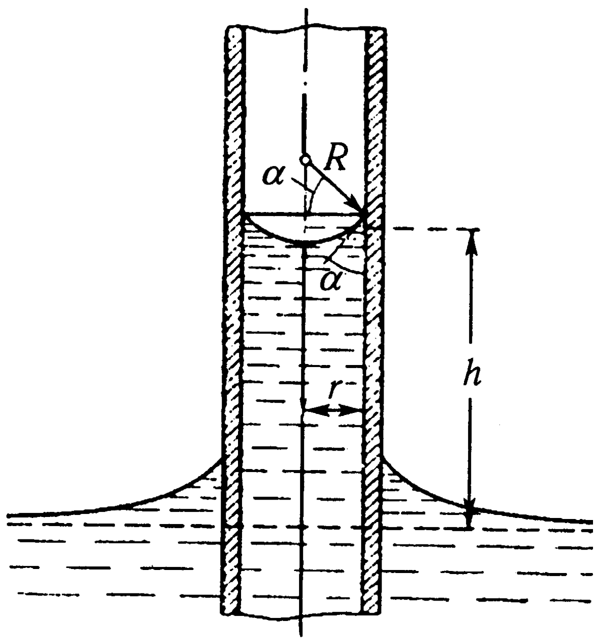
$$F_{\text{пов}} = 2\pi r\sigma\cos\theta \qquad (8)$$

и формула (7) перейдет в

$$h = \frac{2\sigma}{\rho gr}\cos\theta \qquad (9)$$

Отметим, что если поверхность частично или полностью не смачиваема ($\theta > 90^{\circ}$), то (7), (8) определяют глубину, на которую опуститься уровень жидкости, при этом (7) соответствует случаю полного не смачивания поверхности ($\theta = 180^{\circ}$).

Вывод с помощью формулы Лапласа. Соотношения (7) и (9) можно получить при использовании формулы Лапласа. Для капиллярных трубок с малым диаметром *мениск* (поверхность, разделяющая жидкость и газ) представляет собой часть сферической поверхности. При полном смачивании (или не смачивании) радиус этой сферы равен радиусу капилляра $R = r$. При неполном смачивании этот радиус равен $r/\cos\theta$ (рис. 8). Приравнивая избыточное давление под изогнутой поверхностью (5)



$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) = \frac{2\sigma}{R}$$

рис. 8

перепаду давления на высоте жидкости h

$$\Delta p = \rho g h$$

получаем формулы (7), (9).

Приложение 1

Сила, действующая на единичную ширину вертикальной стенки со стороны жидкости глубины *h*

Разобьем жидкость глубины h на N слоев глубиной

$$\Delta x_i = h/N \tag{10}$$

каждый (рис. 9). Выберем Δx настолько малым, чтобы перепадом давления

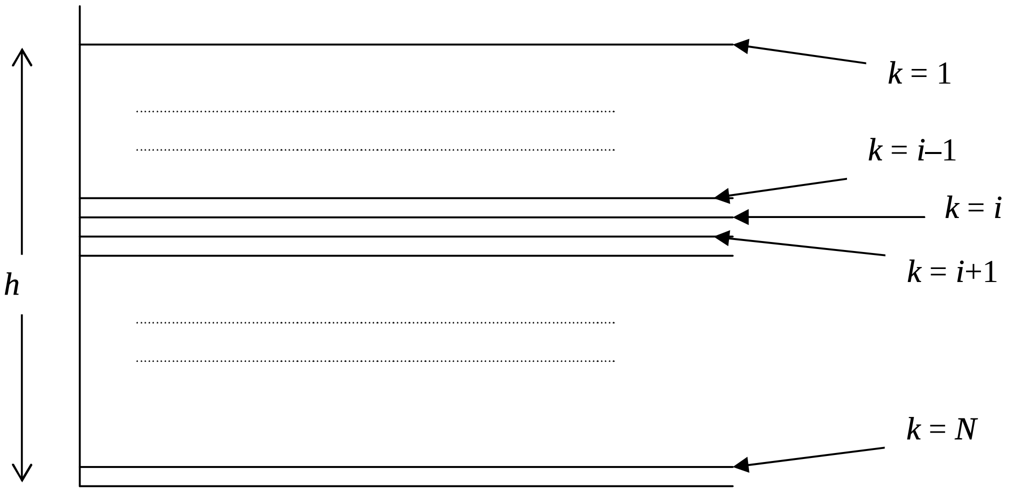


рис. 9

на этой глубине можно было бы пренебречь (чем больше N, тем точнее будет этот результат). Тогда давление внутри i-го слоя равно

$$p_i = \rho g x_i, = \rho g i h/N \tag{11}$$

где ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения. Сила же, действующая на вертикальную площадку $S_i = b\Delta x_i$, где b – ширина вертикальной стенки, равна $F_i = p_i S_i$. Полная сила, действующая на вертикальную стенку равна

$$F = \sum_{i=1}^{N} F_i = \sum_{i=1}^{N} p_i S_i = \sum_{i=1}^{N} \rho g b x_i \Delta x_i = \rho g b \sum_{i=1}^{N} x_i \Delta x_i \tag{12}$$

используя (10), (11), а также формулу для суммы N членов арифметической прогрессии $x_i = i$, получаем

$$F = \rho g b \left(\frac{h}{N}\right)^2 \sum_{i=1}^{N} i = \rho g b \left(\frac{h}{N}\right)^2 \frac{N(N+1)}{2}$$

Как мы отметили выше, данное выражение тем точнее, чем больше N. При $N \to \infty$ можно пренебречь в скобках в числителе единицей по сравнению с N, окончательно получаем

$$F = \frac{\rho g b h^2}{2} = \frac{\rho g h}{2} bh = \frac{\rho g h}{2} S \tag{13}$$

Часто в рассмотрении задач поверхностного натяжения требуется сила, действующая не на всю поверхность S, а на поверхность единичной длины в направлении, перпендикулярном высоте, т.е. на поверхность единичной ширины. В этом случае получаем

$$F = \frac{\rho g h^2}{2} \tag{14}$$

Замечание 1. Отметим, что сила, описываемая формулой (13) представляет собой произведение среднего по высоте давления (на нулевой глубине давление равно 0, на глубине h давление равно $p = \rho g h$) на площадь боковой поверхности.

Замечание 2. Во второй части пособия по термодинамике, отмечалось, что сумма (12) представляет при $\Delta x_i \to 0$ интеграл, т.о.

$$F = \rho g b \sum_{i=1}^{N} x_i \Delta x_i \bigg|_{\Delta x_i \to 0} = \rho g b \int_0^h x dx = \rho g b \frac{x^2}{2}\bigg|_0^h = \rho g b \frac{h^2}{2}$$

т.е. (с учетом того, что $bh = S$) представляет собой (13).

Приложение 2
Жидкость, подходящая к плоской стенке

Рассмотрим границу раздела жидкости и газа, подходящую к плоской вертикальной стенке (рис. 10). На высоте z (относительно плоской поверхности раздела жидкости и газа, реализующейся вдали от стенки) избыточное давление (ρgz) должно компенсироваться изгибанием поверхности (5). Условие равновесия, таким образом, выглядит

$$\rho gz-\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=0 \qquad (15)$$

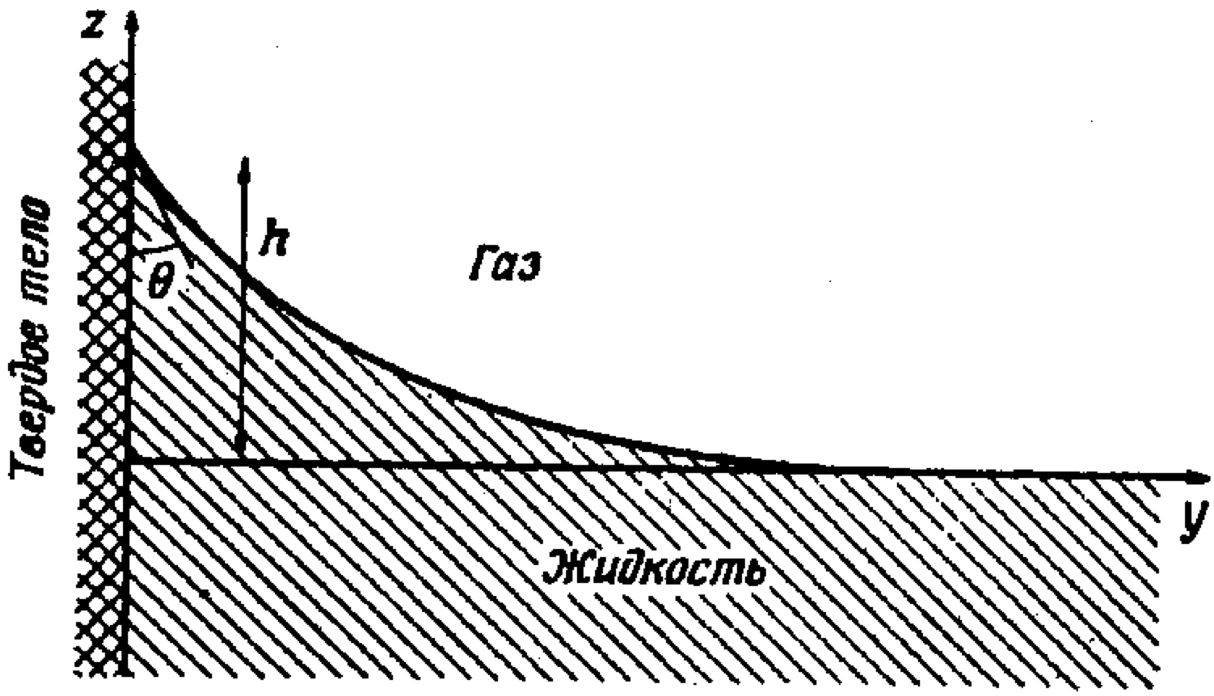


рис. 10

Поскольку стенка плоская, то можно выбрать секущие плоскости для (5) так, что один из радиусов (R_1) кривизны станет равным бесконечности (соответствующая плоскость разрежет поверхность раздела жидкость-газ по прямой, параллельной плоской стенке, радиус же кривизны прямой равен бесконечности (прямая есть окружность бесконечного радиуса)). Уравнение (15) перейдет при этом (см. приложение 3 с той лишь разницей, что в нем рассматривается функция не $z(y)$, а $y(x)$) в

$$\frac{\rho g}{\sigma}z(y)-\frac{z''(y)}{(1+z'(y)^2)^{3/2}}=0$$

где последнее слагаемое левой части представляет собой второй обратный радиус кривизны $1/R_2$, z рассматривается как функция расстояния от стенки y, отсчитываемого в перпендикулярном к ней направлении. Выполняя одно интегрирование, получаем

$$\frac{\rho g}{2\sigma}z(y)^2+\frac{1}{(1+z'(y)^2)^{1/2}}=C \qquad (16)$$

Рассматривая граничное условие вдали от стенки (z = 0, z' = 0) получаем C = 1. Таким образом, высота h, на которую на твердой стенке поднимается (или опускается) жидкость равна

$$h^2=\frac{2\sigma}{\rho g}(1-\sin\theta) \qquad (17)$$

где θ – угол смачивания.

Используя граничное условие на стенке ($z(y{=}0) = h$) для определения постоянной при повторном интегрировании (16) получаем уравнение границы раздела $z(y)$ жидкость-газ в неявном виде

$$\frac{y}{d}=\mathrm{Arch}\left(\frac{2d}{z}\right)-\mathrm{Arch}\left(\frac{2d}{h}\right)+\left(4-\frac{h^2}{d^2}\right)^{1/2}-\left(4-\frac{h^2}{z^2}\right)^{1/2}$$

где

$$d^2 = \sigma/\rho g$$

Замечание. Условие (17) можно получить из баланса сил, действующих на часть жидкости над свободной поверхностью z = 0 (рис. 10). Влево на единичную длину границы раздела действуют силы $\sigma\sin\theta$ и $\rho g h^2/2$ (см. приложение 1), вправо – σ. Приравнивая силы, действующие влево и силу, действующую вправо, получаем (17).

Приложение 3
Вычисление кривизны кривой

При движении тела по окружности радиуса R с постоянной скоростью v, тело движется с центростремительным ускорением (см. пособие по механике)

$$a = \frac{v^2}{R} \qquad (18)$$

Скорость представляет собой производную от перемещения по времени

$$v = \frac{dl}{dt}$$

ускорение – производную от скорости по времени. Распишем компоненты ускорения

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}$$

Чтобы воспользоваться теоремой Пифагора возведем (18) в квадрат, получаем

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 = \frac{v^4}{R^2} = \frac{1}{R^2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^4$$

Умножаем последнее равенство на v^{-4}, получаем

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{dl^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dl^2}\right)^2$$

Это соотношение мы можем использовать для вычисления *радиуса кривизны* R (или *кривизны* $1/R$) произвольной кривой, о котором мы упоминали в п. формула Лапласа.

Пусть координаты кривой x, y параметризованы (выражены как функции) длины этой кривой l. Кривизна кривой в точке l определяется выражением

$$k(l) = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dl^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dl^2}\right)^2} \qquad (19)$$

Изменение длины кривой связано с изменениями координат кривой (в силу теоремы Пифагора) соотношением

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Из этого соотношения можно найти связь производных от длины кривой по координатам

$$l'_x = \sqrt{1 + y'^2_x} \qquad (20)$$

$$l'_y = \sqrt{x'^2_y + 1} = x'_y\sqrt{1 + y'^2_x} = \frac{\sqrt{1 + y'^2_x}}{y'_x} \qquad (21)$$

Рассмотрим кривую, которую можно представить в виде функции $y(x)$, и будем далее выражать различные величины также как функции x. Из (20), (21) имеем

$$l''_{xx} = \left(\sqrt{1+y'^2_x}\right)'_x = \frac{y'_x y''_{xx}}{\sqrt{1+y'^2_x}} \tag{22}$$

$$l''_{yx} = \left(\frac{\sqrt{1+y'^2_x}}{y'_x}\right)'_x = \frac{\dfrac{y'_x y''_{xx}}{\sqrt{1+y'^2_x}}\, y'_x - \sqrt{1+y'^2_x}\, y''_{xx}}{(y'_x)^2} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^2\sqrt{1+y'^2_x}} \tag{23}$$

Рассмотрим величины, входящие в (19). Учитывая (20), (21) получаем

$$\frac{dx}{dl} = \frac{1}{\dfrac{dl}{dx}} = \frac{1}{l'_x}$$

$$\frac{d^2x}{dl^2} = \left(\frac{1}{l'_x}\right)'_x \frac{dx}{dl} = -\frac{l''_{xx}}{(l'_x)^3}$$

$$\frac{dy}{dl} = \frac{1}{\dfrac{dl}{dy}} = \frac{1}{l'_y}$$

$$\frac{d^2y}{dl^2} = \left(\frac{1}{l'_y}\right)'_x \frac{dx}{dl} = -\frac{l''_{yx}}{(l'_y)^2 l'_x}$$

Окончательно, используя (20)-(23), имеем

$$k(l) = \frac{y''_{xx}}{\sqrt{(1+(y'_x)^2)^3}}$$

Приложение 4

Зависимость коэффициента поверхностного натяжения s между воздухом и водой (10^{-3} Н/м (дин/см)) от температуры *t* (°C)

t	0	10	15	20	25	30	40	50	60	80	90
σ	75.7	74.2	73.5	72.8	72.0	71.18	69.6	67.9	66.18	62.6	60.75

t	100	120	150	180	210	240	300	370
σ	58.8	54.9	48.63	42.25	35.4	28.57	14.40	0.47

Примеры решения задач

1. Капля воды с массой m = 0.1 г введена между двумя плоскими и параллельными между собой пластинами, смачиваемыми водой, причем краевой угол $\theta = 0^o$. Определить силу F притяжения между пластинами, если они находятся друг от друга на расстоянии $d = 10^{-4}$ см? Поверхностное натяжение воды (при 18 ^oC) σ = 73 дин/см.

Ответ: $F = \dfrac{2m\sigma}{\rho d^2}$ = 1.5 10^4 Н.

Решение. Капля примет форму диска с вогнутой периферийной поверхностью. Кривизной сечения этой поверхности плоскостью, параллельной пластинкам, можно пренебречь. Радиус кривизны нормального к нему сечения $r = d/2$. Средняя кривизна боковой поверхности диска

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \approx \frac{2}{d}$$

Давление жидкости между дисками меньше атмосферного на $\Delta P = 2\sigma/d$. Площадь диска $S = m/(\rho d)$, где ρ – плотность жидкости. Пластины будут прижиматься друг к другу с силой

$$F = S\Delta P = \frac{2m\sigma}{\rho d^2} = 1.5\ 10^9 \text{ дин} = 1.5\ 10^4 \text{ Н.}$$

2. Абсолютно смачиваемый канал переменного сечения, радиус которого связан с высотой как $r = r_0\exp(-h/r_0)$, расположен вертикально в однородном гравитационном поле. Внутрь канала помещается мыльная пленка массы m с коэффициентом поверхностного натяжения σ. Считая пленку плоской, определить, на какой высоте она установится.

Ответ: $h = r_0 \ln\sqrt{\dfrac{4\pi\sigma r_0}{mg}}$.

Решение. Пленка установится на высоте, соответствующей минимуму полной энергии $mgh + 2\sigma S$, где S – площадь поперечного сечения канала. Беря производную от данного выражения по h и приравнивая ее к нулю, получаем

$$mg - 4\sigma\pi r_0 \exp(-2h/r_0) = 0$$

или окончательно

$$h = r_0 \ln\sqrt{\frac{4\pi\sigma r_0}{mg}}.$$

3. На тонкое проволочное кольцо радиуса R натянута мыльная пленка. Масса пленки M = 1 г, а коэффициент поверхностного натяжения σ = 30 дин/см. Вычислить время схлопывания мыльной пленки, если «прокол» пленки сделан

в ее центре. Какая часть энергии пленки перейдет в кинетическую энергию движения жидкости пленки?

Ответ: $t=\sqrt{\dfrac{M}{2\pi\sigma}}$ = 0.23 с, $\dfrac{K}{E_{пл}}=\dfrac{1}{2}$.

Решение. На движущийся, нарастающий валик мыльного раствора (радиуса x) действует сила поверхностного натяжения $f = 4\pi\sigma x$. Уравнение движения этого валика

$$\frac{d(mV)}{dt}=f$$

где m – «текущая» масса валика, которая определяется через предельный радиус R валика и его предельную массу M.

$$m=\frac{\pi x^2}{\pi R^2}M=\frac{x^2}{R^2}M$$

Подставляя в уравнение движения, получаем

$$V^2+\frac{x}{2}\frac{dV}{dt}=\frac{2\pi R^2\sigma}{M}$$

Правая часть уравнения представляет собой константу. Таким образом, решение задачи сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{x\ddot{x}}{2}+\dot{x}^2=\frac{x}{2}\frac{dV}{dt}+V^2=\mathrm{const}$$

Т.к. $x > 0$ и $dV/dt \geq 0$, то данное условие выполняется только при $dV/dt = 0$, т.е. скорость постоянна (V = const) и равна

$$V=\sqrt{\frac{2\pi R^2\sigma}{M}}$$

При постоянной скорости время схлопывания мыльной пленки равно

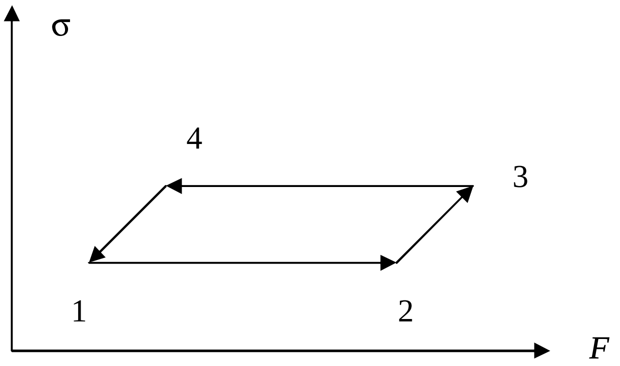
$$t=\frac{R}{V}=\sqrt{\frac{M}{2\pi\sigma}}=0.23\ \text{с}$$

Начальная энергия пленки $E_{пл} = 2\pi R^2\sigma$, а кинетическая энергия в конце $K = MV^2/2 = \pi R^2\sigma$. Если пренебречь энергией пленки в конце, получаем искомое решение.

4. Рассмотрев цикл Карно для пленки жидкости в предположении, что температуры нагревателя и холодильника бесконечно мало отличаются друг от друга, и применив теорему Карно, найти производную от коэффициента поверхностного натяжения σ жидкости по температуре T.

Ответ: $\dfrac{d\sigma}{dT}=-\dfrac{q}{T}$.

Решение. Рассмотрим пленку жидкости, участвующую в бесконечно малом цикле Карно. По горизонтальной оси будем откладывать площадь



пленки F, по вертикальной – поверхностное натяжение σ (см. рис.). При постоянной температуре поверхностное натяжение также постоянно. Поэтому на диаграмме цикла изотермы изобразятся горизонтальными прямыми. Начальное состояние пленки характеризуется точкой 1. Приведем пленку в тепловой контакт с нагревателем, температура которого равна температуре пленки в состоянии 1. Затем внешними усилиями квазистатически растянем пленку до состояния 2. На это надо затратить работу. Эта работа отрицательна: $A_1 = -\sigma(T_1)\Delta F$, где ΔF – приращение площади пленки при растяжении по изотерме 1-2. При изотермическом растяжении к пленке надо подводить тепло: $Q_1 = q\Delta F$. В состоянии 2 изолируем пленку от нагревателя и адиабатически бесконечно мало растянем ее до состояния 3, в котором пленка примет температуру холодильника T_2. Предполагается, что T_1 и T_2 бесконечно мало отличаются друг от друга. В состоянии 3 приведем пленку в тепловой контакт с холодильником и изотермически переведем ее в состояние 4. Поверхность пленки уменьшится на ΔF, и она совершит положительную работу $A_2 = \sigma(T_2)\Delta F$. Из состояния 4 вернем пленку в исходное состояние 1. Работой пленки на адиабатах 2-3 и 4-1 можно пренебречь как величиной более высокого порядка малости. Полная работа, совершенная пленкой во время цикла

$$A = A_1 + A_2 = (\sigma(T_2) - \sigma(T_1))\Delta F = \frac{d\sigma}{dT}(T_2 - T_1)\Delta F$$

Для цикла Карно (см. формулу (2.34) пособия по термодинамике) имеем

$$\frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Подставляя сюда найденные выше выражения для A и Q_1, получаем

$$\frac{d\sigma}{dT} = -\frac{q}{T}.$$

5. Определить влияние кривизны поверхности жидкости на давление ее насыщенного пара (В. Томсон (Кельвин)).

Ответ: $p = p_0 \exp\left(\pm \frac{2m\sigma}{\rho r k T}\right).$

Решение. Если h есть высота поднятия жидкости в капилляре, то убыль давления насыщенного пара на такой высоте есть

$$\Delta p = \rho_п g h$$

где $\rho_п$ – плотность насыщенного пара при данной температуре. С другой стороны согласно формуле (7) основного текста

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$$

Подставляя это h в предыдущую формулу, получаем

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r}\frac{\rho_п}{\rho} \qquad (1)$$

При выпуклой сферической поверхности данная формула определяет превышение давления насыщенного пара по сравнению с давлением над плоской поверхностью.

При выводе формулы (1) плотность насыщенного пара $\rho_п$ считалась не зависящей от высоты. Если высота h достаточно большая, то это необходимо учесть. Согласно формуле (1.32) пособия по газовым законам (барометрическая формула) получаем (*уравнение Кельвина*)

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{2m\sigma}{\rho r kT}\right) \qquad (2)$$

(для выпуклой поверхности будем иметь $p = p_0 \exp\left(\frac{2m\sigma}{\rho r kT}\right)$.

Заметим, что выражение (1) получается, когда значение экспоненты мало. В этом случае ($\exp(x) \approx 1 + x$) и формула (2) приобретает вид

$$\Delta p = p_0 - p = p_0 \frac{2m\sigma}{\rho r kT}$$

Применяя теперь формулу (1.9) пособия по газовым законам к давлению насыщенных паров ($p_0 = nkT$) и учитывая, что $\rho_п = mn$, получаем соотношение (1).

Таким образом, если показатель экспоненты больше единицы следует пользоваться выражением (2). Если же показатель экспоненты меньше единицы, то можно пользоваться выражением (1). В этом случае

$$r \le 2m\sigma/(\rho kT)$$

Пример: Оценим максимальное давление, при котором водяной пар может оставаться пересыщенным при температуре 100 ^{o}C, находясь в сосуде с не смачиваемыми стенками.

Для грубой оценки можно считать, что «минимальная» капля – это образование из 13 молекул-шаров (в модели плотной упаковки шаров). Диаметр такой капли равен 3d, где d – диаметр молекулы, т.е.

$$r = 3\sqrt[3]{\frac{\mu}{N_A \rho}} \approx 9.3\ 10^{-8}\ \text{см}$$

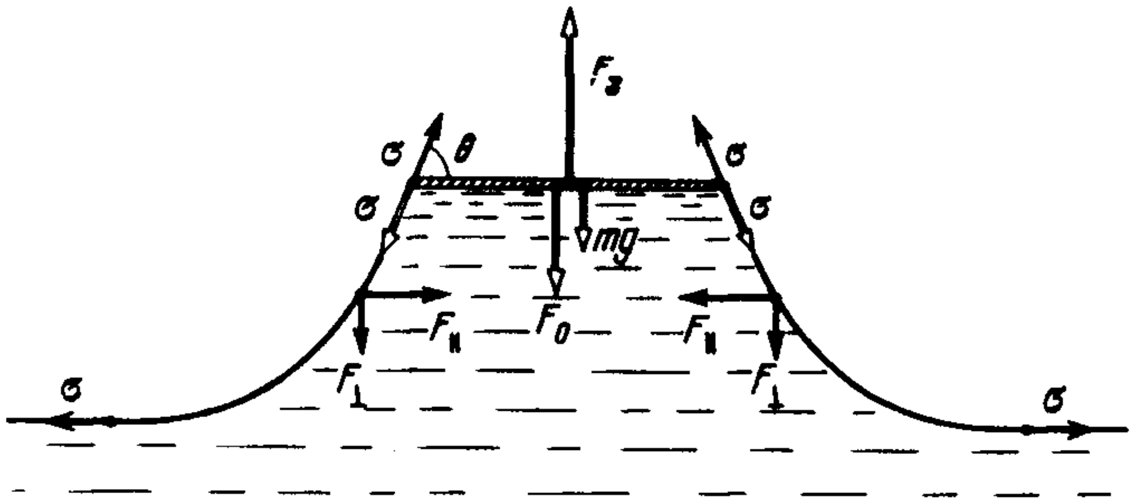
тем самым

$$P_r\left(1+\frac{2\sigma\mu}{RT\rho_ж r}\right)\approx 1.9\ \text{атм.}$$

6. Длинная пластина ширины l приведена в соприкосновение с поверхностью жидкости. Затем пластину стали поднимать. Как зависит сила, действующая на единицу длины пластины, от высоты ее подъема x? Плотность жидкости ρ, коэффициент поверхностного натяжения σ. Масса единицы длины пластины m.

Ответ: $F_x = F_0 + mg + 2\sigma\sin\theta = mg + \rho gx(l + 2\sqrt{\sigma/\rho g - x^2/4})$.

Решение. На рисунке изображены силы, действующие на участок пластины единичной длины, и силы, действующие на участки боковой



поверхности единичной длины: F_x – искомая сила, mg – сила тяжести, действующая на пластину, $F_0 = \rho gxl$ и $F_{\parallel} = \rho gx^2/2$ – силы, вызываемые отрицательным давлением жидкости (см. формулу (14) приложения 1), σ – коэффициент поверхностного натяжения. Из условия равновесия боковой поверхности жидкости (см. похожее условие в приложении 2 (17) и замечание к нему) следует, что

$$F_{\parallel} = \rho gx^2/2 = \sigma - \sigma\cos\theta, \qquad \cos\theta = 1 - \rho gx^2/2\sigma$$

Из условия равновесия пластины имеем

$$F_x = F_0 + mg + 2\sigma\sin\theta = mg + \rho gx(l + 2\sqrt{\sigma/\rho g - x^2/4}).$$