

и освоено, так как идея замены переменных является сквозной и в том или ином виде фигурирует практически во всех параграфах. Ограничимся рассмотрением одного примера.

4. Доказать, что если  $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$ , то и  $\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0$ . Доказать также, что из второго равенства следует первое.

Решение. Обозначим  $b-c=x$ ,  $c-a=y$ . Перейдем к новым переменным  $x, y, z$ :  $a=c-y$ ,  $b=c+x$ . В новых обозначениях первое из данных в условии равенств примет вид

$$\frac{c-y}{x} + \frac{c+x}{y} - \frac{c}{x+y} = 0.$$

Оно легко преобразуется:

$$cy(x+y) - y^2(x+y) + cx(x+y) + x^2(x+y) - cxy = 0,$$

$$c(x^2 + xy + y^2) + (x-y)(x+y)^2 = 0.$$

Второе равенство будет иметь вид

$$\frac{c-y}{x^2} + \frac{c+x}{y^2} + \frac{c}{(x+y)^2} = 0,$$

$$c((x^2 + y^2)(x+y)^2 + x^2y^2) + (x^3 - y^3)(x+y)^2 = 0.$$

Коэффициент при  $c$  оказывается равным (проверить!)

$$x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)^2.$$

Таким образом, поскольку при  $xy \neq 0$  также  $x^2 + xy + y^2 \neq 0$ , а  $x^2 - y^2 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ , второе равенство преобразуется после сокращения на  $x^2 + xy + y^2$  к тому же виду, что и первое.

Приведенное решение содержит подсказку, позволяющую найти другое решение: левая часть второго равенства получается из левой части первого умножением на

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{xy(x+y)} = \frac{(x+y)^2 - xy}{xy(x+y)} = \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+y} = \frac{2}{x+y}.$$

В самом деле,

$$\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right) \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right) =$$

$$= \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} + \left(\frac{a}{(b-c)(c-a)} + \frac{a}{(b-c)(a-b)} + \frac{b}{(c-a)(b-c)} + \frac{b}{(c-a)(a-b)} + \frac{c}{(a-b)(b-c)}\right) =$$

$$= \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} + \frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)} \times$$

$$\times (a(a-b) + a(c-a) + b(a-b) + b(b-c) + c(b-c) + c(c-a)) =$$

$$= \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2}.$$

### 3. Задачи

Упростите числовое выражение (1—17).

- $\frac{5\sqrt{3} + \sqrt{50}(5 - \sqrt{24})}{\sqrt{75} - 5\sqrt{2}}$
- $\frac{3\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{80}} - \frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}} + 5\sqrt{\frac{1}{5}} + \sqrt{20} - 10\sqrt{0,2}}{3\frac{1}{2}\sqrt{32} - \sqrt{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{1}{8}} + 6\sqrt{\frac{2}{9}} - 140\sqrt{0,02}} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}$
- $(\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2})^{-1} + \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $\left(\frac{3\left(\frac{17}{90} - 0,125 \cdot \frac{1}{8}\right) : 480}{(7:1,8 - 2\frac{1}{3} \cdot 1,5) \cdot 2\frac{2}{3}}\right)^{-1} : \left(\frac{579 \cdot 10^{-2}}{0,7} + 0,3\right)$
- $\frac{\left(\left(\frac{3}{12} - \frac{2}{18} + \frac{2}{24}\right) \cdot \frac{5}{31} \cdot \frac{3}{52} \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{6}\right)\right) \cdot 1,7}{\frac{19}{84} : \left(\frac{5}{42} - \frac{2}{28} + \frac{5}{24}\right) + \frac{2}{27} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}}$
- $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$
- $\sqrt{5} + 2\sqrt{6} - \sqrt{5} - 2\sqrt{6}$
- $\sqrt[3]{2} + \sqrt{5} + \sqrt[3]{2} - \sqrt{5}$
- $\sqrt[3]{5} \sqrt{2} + 7 - \sqrt[3]{5} \sqrt{2} - 7$
- $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$
- $\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{3}}$
- $\sqrt{8} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5} + \sqrt{8} - 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5}$
- $\sqrt{9} + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}(\sqrt{6} - \sqrt{2} + 1)$
- $\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{13} + \sqrt{48} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{13} - \sqrt{48}$
- $\sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}}$
- $\frac{(4 + \sqrt{15})^{\frac{3}{2}} + (4 - \sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6 + \sqrt{35})^{\frac{3}{2}} - (6 - \sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}$
- $\sqrt[3]{\frac{1}{3}(\sqrt{2} - 1)} \cdot (\sqrt{2} + 1)$

Докажите равенство (18—19).

- $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x)$
- $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

Упростите алгебраическое выражение (20—47).

- $\left(\left(1 - \frac{1+z}{1+\sqrt{z}}\right) : \left(\sqrt{z}(1 - \sqrt{z}) - \frac{(1-z)(\sqrt{z}-1)}{1+\sqrt{z}}\right)\right)^3 - z$
- $\frac{a^2 + 10a + 25 + 2\sqrt{5}(\sqrt{a^2 + 5})}{(a^2 - 25)(\sqrt{a^2 - 125})(a + \sqrt{5a + 5})^{-1}}$
- $\left(\frac{3 - \sqrt{a}}{9 - a} + \frac{1}{3 - \sqrt{a}} - 6\frac{a^2 + 16a}{729 - a^2}\right)^{-1} + \frac{a(a+9)}{54}$
- $\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot \sqrt{16ab}(a + \sqrt{a^2b + ab})}{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 \cdot \sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{a^2 - \sqrt{b^3}}$
- $\left(\left(\frac{\sqrt{2}a^2 + x\sqrt{x}}{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}} - 1\right)^{-1} \left(1 + \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^{-1} + 1\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{x-y}$
- $\left(\frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{a}}{\sqrt{16a + 12\sqrt{a} + 9}} - \frac{\sqrt{a-3}}{2\sqrt{a+3}}\right) \cdot (2\sqrt{a+3})$
- $\left(\frac{(a^{\frac{3}{2}} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{2})}{a + \sqrt{2a+2}}\right)^2 + \sqrt{(a^2 + 2)^2 - 8a^2}$
- $\left(\frac{1 + \sqrt{1-x}}{1-x + \sqrt{1-x}} + \frac{1 - \sqrt{1+x}}{1+x - \sqrt{1+x}}\right)^2 \cdot \frac{x^2 - 1}{2} + 1$
- $\left(\frac{\sqrt{xy} - \sqrt{xy}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}\right)^2 \left(1 + 2\sqrt{\frac{y}{x} + \frac{x}{y}}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Вычислите при  $x=9$ ;  $y=0,04$ .

при  $x=9$ ;  $y=0,04$ .

- $\frac{b^2 - 3b - (b-1)\sqrt{b^2 - 4} + 2\sqrt{b+2}}{b^2 + 3b - (b+1)\sqrt{b^2 - 4} + 2\sqrt{b-2}}$
- $\left(\frac{1}{2}((1 + \sqrt{a})^2 + (1 - \sqrt{a})^2) - (a\sqrt{5} - 1)^2\right) : 2a^2$ . Вычислите при  $a=5 - \sqrt{5}$ .
- $\frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$ , где  $x = \frac{1}{2}(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}})$ .
- $\left(\frac{5}{6}a^{-\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(b^{\frac{5}{6}}a^{-\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2a + \frac{4a^2}{a-b}$
- $\frac{a+b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{b}{b - \sqrt{ab}} + \frac{a}{\sqrt{ab} + a}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{a+b} - 2\sqrt{ab}$
- $\frac{x^4 - (x-1)^2}{(x^2 + 1)^2 - x^2} + \frac{x^2 - (x-1)^2}{x^2(x+1)^2 - 1} + \frac{x^2(x-1)^2 - 1}{x^2 - (x+1)^2}$

- $\left(\frac{x^2}{y^2} - 2 + \frac{y^2}{x^2}\right) \cdot \frac{x^4y^4}{xy+y^2} \cdot \frac{x-y+\frac{y}{x}}{x^2 - 2x^2y + xy^2}$
  - $\frac{a+b}{ax+by} + \frac{a-b}{ax-by} + \frac{2(a^2x+b^2y)}{a^2x+b^2y} - \frac{4(a^2x-b^2y)}{a^2x-b^2y}$
  - $\frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} + \frac{a-b}{a+b} + \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$
  - $\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{ab}{(c+a)(c+b)} + \frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$
  - $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{2x(x-1)^2}{x^3 + x^2 + 1} + \frac{2x^2(x^2 - 1)^2}{x^4 + x^2 + 1}$
  - $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$
  - $\left(\frac{p+\frac{1}{q}}{q+\frac{1}{p}}\right)^2 \left(\frac{p-\frac{1}{q}}{q-\frac{1}{p}}\right)^2$
  - $\frac{1 + (a + \sqrt{a^2 - 1})^2 (b + \sqrt{b^2 - 1})^2}{(a + \sqrt{a^2 - 1})(b + \sqrt{b^2 - 1})}$
  - $\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$ , где  $x = \frac{1}{2}(y + \frac{1}{y})$ ;  $y > 0$ .
  - $\frac{1}{\sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}}$
  - $\sqrt{\frac{2x^2 + 1 + x\sqrt{4x^2 + 3}}{2x^2 + 3 + x\sqrt{4x^2 + 3}}}$
  - $\sqrt[3]{\frac{x^2 - 3x + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{x^2 - 3x - (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{2}}$
  - $\left(\frac{a\sqrt{a-3\sqrt{a}} + (a-1)\sqrt{a-4} + 2}{a\sqrt{a-3\sqrt{a}} + (a-1)\sqrt{a-4} - 2}\right)^{-2} \cdot \frac{a + \sqrt{a-2}}{a - \sqrt{a-2}}$
- Докажите равенство (48—51).
- $\frac{a^5}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^5}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^5}{(c-a)(c-b)} =$   
 $= a^5 + b^5 + c^5 + a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + abc$
  - $(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1) =$   
 $= \frac{x^{32} + x^{16} + 1}{x^2 + x + 1}$
  - $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^n}\right) = \frac{n+1}{2n}$
  - $p^3 = \left(p - \frac{p^2 - 2q^2}{p^2 + q^2}\right)^3 + \left(q \frac{2p^2 - q^2}{p^2 + q^2}\right)^3 + q^3$

52. Докажите, что если  $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = 2\frac{11}{12}$ , то  $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 3\frac{1}{12}$ ;  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

ми» методами. И наоборот, уже в этом параграфе можно найти много примеров достаточно трудных стандартных уравнений и систем уравнений.

### 11. Задачи

Решите уравнение (1–10).

1.  $\frac{3x+7}{5x+1} = \frac{2x+1}{x+4}$ .
  2.  $x^2 + 2103x + 2102 = 0$ .
  3.  $118x^2 + 1389x - 1507 = 0$ .
  4.  $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+5}{x-5} = \frac{x+3}{x-3} + \frac{x+4}{x-4}$ .
  5.  $\frac{x^2+x+2}{3x^2+5x-14} = \frac{x^2+x+6}{3x^2+5x-10}$ .
  6.  $\frac{1}{x-7} + \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-4} = 0$ .
  7.  $112 + 19 \left( \frac{8-3x}{x+3} + \frac{3-2x}{x+7} \right) = 17 \left( \frac{15-x}{x+4} + \frac{31+2x}{x+6} \right)$ .
  8.  $\frac{x^2+2x+2}{x+1} + \frac{x^2+8x+20}{x+4} = \frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+6x+12}{x+3}$ .
  9.  $\left(x - \frac{1}{x}\right) \left(x - \frac{4}{x}\right) \left(x - \frac{9}{x}\right) = (x+1)(x+2)(x+3)$ .
  10.  $(x-1)^2 + (2x+3)^2 = 27x^2 + 8$ .
  11. Найдите сумму наибольших корней уравнений  $x^2 - 5x + 2 + 3\sqrt{2} = 0$ ,  $x^2 - 4x + 1 - 2\sqrt{2} = 0$ .
- Решите уравнение (12–119).
12.  $\sqrt{5+2x} = 5-x$ .
  13.  $\sqrt{7+3x} = 4-x$ .
  14.  $\sqrt{5x-34} = x-7$ .
  15.  $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4$ .
  16.  $\sqrt{2\sqrt{7} + \sqrt{2} - 3\sqrt{5}} x = x$ .
  17.  $\sqrt{5-x} = \sqrt{3+2-x}$ .
  18.  $\sqrt{x^2-7x+1} = \sqrt{2x^2-15x+8}$ .
  19.  $\sqrt{(x+1)(2x+3)} = x+3$ .
  20.  $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2x+3} = x+3$ .
  21.  $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 7$ .
  22.  $\sqrt{5-x} + \sqrt{8+2x} = 2$ .
  23.  $\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+\frac{3}{4}x} = \sqrt{4x^2+3x}$ .
  24.  $2x - \sqrt{x^3+2x^2-3x} = 0$ .
  25.  $x + \sqrt{\frac{x^2+4x}{x-2}} = 0$ .
  26.  $\frac{1-x}{1+x} \sqrt{\frac{1+3x}{1-3x}} = 0$ .
  27.  $\frac{\sqrt{4+x}}{2+\sqrt{4+x}} = \frac{\sqrt{4-x}}{2-\sqrt{4-x}}$ .
  28.  $\frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6} + \sqrt{x-6}} = \frac{x}{6}$ .
  29.  $\sqrt{5x+7} - \sqrt{x+4} = 4x+3$ .
  30.  $\sqrt{45x+12} - \sqrt{15x+2} = \sqrt{10(3x+1)}$ .
  31.  $\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x-1} = \sqrt{5x+2}$ .

36

32.  $\sqrt{x^2-5x+1} + \sqrt{8x-x^2-12} = \sqrt{3x-11}$ .
33.  $\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x-1} = \sqrt{5x+2}$ .
34.  $\sqrt{x^2-7x+10} + \sqrt{x^2-9x-36} = \sqrt{2x^2-16x-26}$ .
35.  $\sqrt{x^2+3x-2} - \sqrt{x^2-x+1} = 4x-3$ .
36.  $\sqrt{2+\sqrt{6}} - (6\sqrt{2}-2\sqrt{3})x = 2x - \sqrt{2}$ .
37.  $\sqrt{x^2-5x+2} - \sqrt{x^2+x+1} = 1-6x$ .
38.  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+33} = \sqrt{x+6} + \sqrt{x+22}$ .
39.  $2(\sqrt{x+15} - \sqrt{x}) = 3(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1})$ .
40.  $\sqrt{9x^2-12x+11} - \sqrt{5x^2-8x+10} = 2x-1$ .
41.  $\frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}{2} = \frac{\sqrt{x}}{3}$ .
42.  $\frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}}{25} = \sqrt{\frac{x^2}{x+5}}$ .
43.  $\frac{x^2+1}{3x^2+2} = \frac{4x^2-5}{x^2+6}$ .
44.  $\frac{3x^2}{x+1} + \frac{x+1}{x^2} = 4$ .
45.  $5\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+3} = 2\sqrt{2(x^2+4x)}$ .
46.  $2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} = 10$ .
47.  $x^{\frac{20}{21}} + x^{\frac{5}{42}} = 12x^{\frac{5}{7}}$ .
48.  $\sqrt{2-x} + \frac{4}{\sqrt{2-x+3}} = 2$ .
49.  $\frac{1}{\sqrt{x+1-2}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{2}{3}$ .
50.  $\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+x+5} = \sqrt{2x^2+2x+17}$ .
51.  $\sqrt{2 + \frac{x}{\sqrt{x+1}}} - 1 = \sqrt{3 - \frac{x}{\sqrt{x+1}}}$ .
52.  $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ .
53.  $\frac{1}{6x^2-7x+2} + \frac{1}{12x^2-17x+6} = 4x^2-5x$ .
54.  $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 16$ .
55.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{35}{12}$ .
56.  $x(x+4) + \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} + 4 \right) = 0$ .
57.  $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x} = 10 \left( \frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right)$ .
58.  $\frac{(x^2+1)^2}{x(x+1)^2} = \frac{625}{112}$ .
59.  $\frac{(x-1)^2 x}{(x^2-x+1)^2} = \frac{2}{9}$ .
60.  $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 5 \left(x + \frac{1}{x}\right)$ .
61.  $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{45}{16}$ .
62.  $10x^2(x-2)^2 = 9(x^2+(x-2)^2)$ .
63.  $\frac{24}{x^2-2x} = \frac{12}{x^2-x} + x^2-x$ .
64.  $x^2+3x+2 = 15 \frac{x^2+5x+10}{x^2+7x+12}$ .
65.  $(x^2-2x+2)^2 + 3x(x^2+2x+2) = 30x^2$ .
66.  $x^4+5x^2(x+1) = 6(x+1)^2$ .

37

67.  $(x^2+x+1)^2 = x^2(3x^2+x+1)$ .
68.  $x^2+2x\sqrt{x+2x}+\sqrt{x}=30$ .
69.  $6 = (2-x)(3-\sqrt{x^2-9})$ .
70.  $\sqrt{x+\sqrt{x+7}} + 2\sqrt{x^2+7x} = 35-2x$ .
71.  $\sqrt[3]{3\sqrt{3x}} = 12 + \sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{x}}}$ .
72.  $\sqrt{\frac{1}{x}-1} + \sqrt{x+1} = \sqrt{\frac{2}{x}}$ .
73.  $\sqrt{\frac{x+5}{5}} - \sqrt{\frac{x-5}{5}} = \sqrt{2\left(1-\frac{5}{x}\right)}$ .
74.  $\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x^2+4x-1} = 3$ .
75.  $\sqrt{x^2+5x+2} + \sqrt{x^2+x+3} = 7$ .
76.  $\sqrt{3x+5} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x+8} + \sqrt{5x-7}$ .
77.  $\sqrt{18+3x} - \sqrt{9-x^2} = \sqrt{3x}$ .
78.  $\frac{1}{6x^2-7x+2} + \frac{1}{12x^2-17x+6} = 8x^2-6x+1$ .
79.  $\frac{2x}{x^2-4x+2} + \frac{3x}{x^2+x+2} + \frac{5}{4} = 0$ .
80.  $\frac{\sqrt{x+\sqrt{3x-6}} - \sqrt{6}}{\sqrt{2x+6}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{6}-\sqrt{x}}}{\sqrt{x+4}}$ .
81.  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .
82.  $x^3-3x^2-3x-1=0$ .
83.  $\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{x^2-3x-2} = \sqrt{2x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-x+2}$ .
84.  $\sqrt{3x+19} - \frac{3}{x} - \sqrt{x+18} + \frac{3}{x} = 1$ .
85.  $x\sqrt{x+x(x-1)} = 2(x-1)^2$ .
86.  $(1+x)(1+2x)(1+3x) = 4(4+x)(4+2x)(4+3x)$ .
87.  $\sqrt{1+x} + \frac{1}{x}\sqrt{1+x} = \sqrt{x}$ .
88.  $\sqrt[3]{x^2-2}\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} = 2$ .
89.  $2x\sqrt[3]{x^2+x}\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x}-2=0$ .
90.  $|5-3x| = 2x+1$ .
91.  $|2x-3| = 3-2x$ .
92.  $|3x-8| - |3x-2| = 6$ .
93.  $|x-1| + |x-3| = 2x-4$ .
94.  $1+x+|x^2-x-3| = 0$ .
95.  $2|x^2+2x-5| = x-1$ .
96.  $x^2-7 = |3x-7|$ .
97.  $|3x+5| = 3x^2+4x+3$ .
98.  $|2x+5| + 2|x-3| = 22$ .
99.  $|x^2-3x|-5 = x+1$ .
100.  $||x+3|-|x-1|| = 2-x^2$ .
101.  $\sqrt{5x-34} = |x-3|-4$ .
102.  $\sqrt{|5x-7|} - 27 = x-7$ .
103.  $(1+x) \cdot |x+2| + |x-3| = 6x+2$ .
104.  $\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1$ .
105.  $|2x - \sqrt{1-4x^2}| = \sqrt{2}(8x^2-1)$ .

38

106.  $3\sqrt{x+1} + |x-5| = 6$ .
107.  $\sqrt{x-2} + |x-5| = 3$ .
108.  $4\sqrt{x+2} = |x+1| + 4$ .
109.  $4x^2 + \sqrt{14} = |x| \cdot \sqrt[3]{224} + 1$ .
110.  $|x|(\sqrt[3]{28} + 1) + 2 = x^2 + \sqrt[3]{224}$ .
111.  $13x - 3x^2 - \frac{x}{\sqrt{x-1}} - \frac{14-x}{\sqrt{x-1}} + |4-x| = 3|x+4-x| - \frac{4}{\sqrt{x-1}} + 4$ .
112.  $\frac{2x}{\sqrt{x+4}} + 4x^2 + 9|2x-3| + 12x + \frac{|2x-3|}{\sqrt{x+4}} = 27 - 2x|2x-3| + \frac{3}{\sqrt{x+4}}$ .
113.  $||x^2 - \sqrt{x+1}| - 3| = x^2 + \sqrt{x+1} - 7$ .
114.  $||x^2 - 3x| - x + 1| = 2x^2 + x - 1$ .
115.  $||x^2 + x^2 - 1| - 4| = x^2 - x^2 + 3$ .
116.  $x = 1 - 5(1 - 5x^2)^2$ .
117.  $2x + 1 + x\sqrt{x^2+2} + (x+1)\sqrt{x^2+2x+3} = 0$ .
118.  $\sqrt{13x+1} + \sqrt{4x-1} = 3\sqrt{x}$ .
119.  $x^2 - 1 = \sqrt{x(-3x^2+5x-3)}$ .

### 14. Задачи

Решить неравенство (1—81).

1.  $3x^2 + 5x > 22$ .
2.  $2x^2 - 17x \leq 9$ .
3.  $\frac{x}{x+1} > 1$ .
4.  $\frac{x^2}{x+1} > \frac{1}{2}$ .
5.  $\frac{3x}{x+1} + \frac{x+1}{x} \leq 5$ .
6.  $\frac{x^2+5x-9}{x^2+3x-4} \geq 2$ .
7.  $-x^2 + 7x + 10 \geq 2(x^2 - 7x - 9)^2$ .
8.  $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 > 0$ .
9.  $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 > 0$ .
10.  $\frac{2x+3}{3x+2} \geq \frac{4x+1}{x+4}$ .
11.  $\frac{1}{1+x} \leq 1 - x$ .
12.  $x + \frac{4}{x+1} \leq 3$ .
13.  $x^2 + x^2 + x > 3$ .
14.  $x(x+1) + (x+2)(x+3) \leq 5$ .
15.  $\frac{3x^2-2x-1}{2x^2+5x+3} < \frac{2x^2-3x+1}{3x^2+7x+4}$ .
16.  $\sqrt{7+x} \geq 7-2x$ .
17.  $\sqrt{x^2-3x-3} < 5-x$ .
18.  $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} > 1$ .
19.  $2x-13 \leq \sqrt{1+7x-x^2}$ .
20.  $x-3 \geq \sqrt{9-x^2}$ .
21.  $\frac{\sqrt{3x-2}}{x-4} < 1$ .
22.  $x\sqrt{5+2x} \geq 5x-x^2$ .
23.  $\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1$ .
24.  $\frac{\sqrt{13-7x-6x^2}}{x-2} \geq 1$ .
25.  $\sqrt{30-x-x^2} > -1$ .
26.  $\sqrt{3x+1} \leq x+1$ .
27.  $\sqrt{x^2+2x-3} < x+1$ .
28.  $\sqrt{x+2} - \frac{4}{\sqrt{x+2}} \leq 3$ .
29.  $\frac{\sqrt{2-x+4x-3}}{x} \geq 2$ .
30.  $(x-3)\sqrt{x^2+3} \leq x^2-9$ .
31.  $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} > \frac{3}{2}$ .
32.  $\sqrt{4+x} \geq 2 + \frac{x}{4}$ .
33.  $3\sqrt{x-2}\sqrt{x-1} > \sqrt{x+1}$ .
34.  $\sqrt{5+x^2} - \sqrt{x-2} \geq x+1$ .
35.  $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} < 3$ .
36.  $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} > 1$ .
37.  $\sqrt{x+8} - \sqrt{x-4} \geq 2$ .
38.  $\sqrt{11+2x} + \sqrt{21-2x} \geq 8$ .
39.  $(9-x^2)\sqrt{x+4} \geq 0$ .
40.  $(x+2)\sqrt{x^2-2x-3} \geq 0$ .
41.  $(x-3)\sqrt{x^2+x-2} \geq 0$ .
42.  $\frac{\sqrt{2x^2-3x+2}}{2x^2+6x} \leq 0$ .
43.  $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geq \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$ .
44.  $(x^2-4x+3)\sqrt{x+1} \leq x^2-2x-3$ .
45.  $\sqrt{3x^2+2x} + \sqrt{14x^2+23x+8} \leq \sqrt{17x^2+25x+8}$ .
46.  $(\sqrt{3+x} + x - 3)(\sqrt{5+4x} + x - 4) \leq 0$ .
47.  $\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+3x-4} > x + \frac{1}{2}$ .
48.  $|2x+5| < 7-x$ .
49.  $3x + |2-x| \leq 5$ .

51

50.  $|7x+5| - 2x \geq 11$ .
51.  $3x > 2 - |3-x|$ .
52.  $5x-7 < |x+2|$ .
53.  $|x-1| < 2x-5$ .
54.  $|x-1| + |x+2| \leq 3$ .
55.  $|3x-1| + |4x+3| \leq 3\frac{1}{4}$ .
56.  $|5x+1| + |2-3x| > 2\frac{3}{5}$ .
57.  $|3x+2| + |2x-3| \leq 11$ .
58.  $|2x+1| + |3x+2| \leq 5x+3$ .
59.  $|2-5x| + |x+1| \geq x+3$ .
60.  $|x-1| \leq |2x-3| - |x-2|$ .
61.  $|5x-1| - |4x+2| \leq |x-3|$ .
62.  $|2x+5| + |3x-7| > |4x+1|$ .
63.  $x^2 + |x-1| \leq 5$ .
64.  $|x+2| + 3-x^2 \leq 0$ .
65.  $|x^2-3| + x^2 + x < 7$ .
66.  $|2x-x-2| \leq 3$ .
67.  $|3x+1| + x+1 \geq 2$ .
68.  $|2x+1| - |3x+1| \leq x+2$ .
69.  $|x^2 - |x^2+x| \geq 11$ .
70.  $\sqrt{3+x} \geq |3-x|$ .
71.  $|2-\sqrt{x+2}| \geq x-2$ .
72.  $\sqrt{5-|x+1|} \leq 2+x$ .
73.  $|\sqrt{x+2} - \sqrt{x+3}| \leq 1$ .
74.  $\sqrt{x^2+x^2-4x+1} \geq |x-2|$ .
75.  $\frac{x^2-1}{|x|-1} > 0$ .
76.  $\frac{\sqrt{5+x^2}+x-5}{x^2-4} < 0$ .
77.  $\frac{|2x+7|-3x-4}{x+5-|5x-7|} \leq 0$ .
78.  $\|2x^2-x|-3\| \leq 2x^2+x+5$ .
79.  $\|x^2-x-1|-5\| \geq x^2+x+8$ .
80.  $\frac{(x^2-1)(\sqrt{3+x^2}+2x)}{|x-2|-4x+3} \geq 0$ .
81.  $\frac{(\sqrt{1+2x^2}-1-x^2)(2x+3|-13x+2|)}{(x^2-5x+4)(\sqrt{5+x+1-x})(x^2-1)} \leq 0$ .

Все три неравенства объединены квадратной скобкой, что означает, что нам надо, решив каждое из них, полученные ответы объединить (а не находить множество значений параметра  $a$ , удовлетворяющее всем трем одновременно, как это делается в системах уравнений или неравенств).

Решая неравенства, получим для каждого из них соответственно

$$-2\frac{1}{4} < a < -1\frac{3}{4}, \quad -1\frac{1}{4} < a < -\frac{3}{4}, \quad \frac{-3-\sqrt{9}}{2} < a < \frac{-3+\sqrt{9}}{2}.$$

Ответ.  $-2\frac{1}{4} < a < -\frac{3}{4}$ .

Мы не будем здесь подробно рассматривать задачи на доказательство неравенств, решения которых основываются на использовании тех или иных свойств квадратного трехчлена. Основные идеи, которые используются чаще всего, сходны с рассмотренными в этом параграфе. (Выделение полного квадрата, оценка дискриминанта и т. д.) Ограничимся одним известным и полезным неравенством, при доказательстве которого свойства квадратного трехчлена используются весьма нестандартно.

28. Доказать, что для любых  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  справедливо неравенство

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$$

(неравенство Коши-Буняковского).  
Решение. Рассмотрим следующую квадратичную функцию от  $x$ :

$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2.$$

При всех  $x$  функция  $f(x) \geq 0$ . Следовательно,  $D \leq 0$ , где  $D$  — дискриминант:

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)x + b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2.$$

Значит,

$$\frac{1}{4}D = (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \leq 0,$$

откуда получаем требуемое неравенство. Легко видеть, что равенство в неравенстве Коши-Буняковского имеет место, если существует  $x$ , обращающий в ноль все слагаемые в выражении для  $f(x)$ , т. е.  $x = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \dots = \frac{b_n}{a_n}$ ; иными словами, если наборы  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  пропорциональны.

Доказанное неравенство имеет очевидную геометрическую интерпретацию. Для  $n=2$ : 3 оно выражает известный факт, что скалярное произведение двух векторов на плоскости и в пространстве не превосходит произведения их длин. Так же можно

интерпретировать неравенство Коши-Буняковского и для произвольных  $n$ .

Из полученного неравенства можно получить следствия. Например, возьмем  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$ . Будем иметь неравенство

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \sqrt{n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)}.$$

\*\*\*

Небольшой обзор различных типов и видов задач, относящихся к теме «Квадратный трехчлен», показывает, сколь разнообразны по тематике, методам решения, уровню сложности задачи, составляющие эту тему. Многие идеи, рассмотренные в нашем обзоре, носят достаточно общий характер и с успехом могут быть использованы при решении задач, относящихся к самым различным разделам алгебры и анализа.

### 26. Задачи

Выделите полный квадрат в выражении (1—6).

1.  $2x^2 - 4x + 3$ .
2.  $-\frac{x^2}{2} + 3x + 1$ .
3.  $4x^2 - 12x + 9$ .
4.  $(x+1)(x-3)$ .
5.  $(x-2)^2 + x + 1$ .
6.  $(x-1)^2 + (x-3)^2$ .
7.  $3x^2 - 4x - 7$ .
8.  $-2x^2 + x + 6$ .
9.  $(x-2)(x-3) - 4$ .
10.  $(x-1)(x-3) + (x-2)(x-4)$ .
11.  $y = x^2 - 2x - 3$ .
12.  $y = x - x^2$ .
13.  $y = x^2 + x + 1$ .
14.  $y = 4x^2 - 12x + 9$ .
15.  $y = -\frac{x^2}{2} + x - 3$ .
16.  $y = (2x+1)(3x+2)$ .

17. Коэффициент при  $x^2$  (старший коэффициент) некоторого квадратного трехчлена равен 1. Парабола, являющаяся графиком этого квадратного трехчлена, имеет вершину в точке с координатами  $(m, -n)$ ,  $n > 0$ . Найдите корни данного квадратного трехчлена.

18. Найдите коэффициенты  $a, b, c$ , если график функции  $y = ax^2 + bx + c$  проходит через точки с координатами:

- a) (1; 0), (-1; 2), (2; 2);
  - b)  $(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}), (-\frac{3}{17}, \frac{9}{289}), (\frac{13}{23}, \frac{169}{529})$ ;
  - в) (0; 1),  $(\frac{1}{2}, 0)$ , (2; -3);
  - г) (-1; -1), (1; -3), (-2; -3).
- Постройте график функции (19—25).

19.  $y = x^2 + 2|x-1|$ .
20.  $y = x|x-1|$ .
21.  $y = x|x| + (x-1)|x-1|$ .
22.  $y = |x^2 - 2|x-1||$ .

125

23.  $y = \frac{x^2 - x}{1 - |x|}$ . 24.  $y = x^4 - 2x^2$ . 25.  $y = |x + \sqrt{-x}|$ .
- Изобразите все точки с координатами  $(x; y)$ , удовлетворяющие неравенству (26–32).
26.  $2y^2 + y \geq x$ . 27.  $x^2 \leq y \leq x$ . 28.  $2y + x \leq y^2 + 2y \leq 2x + y$ . 29.  $\sqrt{y} \leq \sqrt{2x - x^2}$ .
30.  $|y| \leq |2x^2 - x|$ . 31.  $|y - x^2| \leq 1$ . 32.  $|x^2 + y| \leq y + 1$ .
- Изобразите все точки с координатами  $(x; y)$ , для которых выполняется равенство (33–46).
33.  $3x^2 + 5xy + y^2 = 0$ . 34.  $|y - 2x| = x^2$ . 35.  $|y - x| + x^2 = 1$ . 36.  $y = |y + x^2 - 3x|$ . 37.  $|y - x| + |y - x^2| = 2$ . 38.  $|y - x^2| + |y + x^2| = 2|x|$ . 39.  $|2x^2 - y| - |x - y| = 2x^2 + y - 2$ . 40.  $\max(x; y) = \min(x^2; y^2)$ . 41.  $\max(x; y^2) = \min(y; x^2)$ . 42.  $y = \min_{-1 < a < 1} (a^2 - 2ax)$ . 43.  $\min(x^2 + 2xy - y^2) = \max(-x^2 - 2xy - 2y^2)$ . 44.  $\min(|x^2 - a| + |y - a|) = 2$ . 45.  $\max \min(a^2 - b^2 - 2ab + 2ax + 2b + y) = 1$ . 46.  $\min \max(a^2 - b^2 - 2ab + 2ax + 2b + y) = 1$ .
47. Дано изображение графика функции  $y = ax^2 + bx + c$  (рис. 18). Определите знаки  $a, b$  и  $c$ .  
Найдите наименьшее значение функции (48–53).
48.  $y = x^2 - 2|x - 2|$ . 49.  $y = x + \sqrt{2x - 3}$ . 50.  $y = x - \sqrt{2x - 3}$ . 51.  $y = |x - 1| - \sqrt{x + 2}$ . 52.  $y = x(|x + 1| + |x - 1|) + 3x^2$ . 53.  $y = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$ .
- Найдите наибольшее значение функции (54–57).
54.  $y = \sqrt{x + 1} - x$ . 55.  $y = (1 - x)|x + 2| - 2x^2$ . 56.  $y = |x^2 - 2| + 2x - 3x^2$ . 57.  $y = \frac{1}{x^2 + |x - 1|}$ .
- Найдите наибольшее и наименьшее значения функции (58–59).
58.  $y = 2 \cos^2 x + \sin x$ . 59.  $y = \sin^2 x - 3 \cos x$ .
- Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке (60–64).
60.  $y = x^2 + 3x, -2 \leq x \leq 1$ . 61.  $y = -x^2 - x + 2, 0 \leq x \leq 2$ . 62.  $y = x^2 + 2|x - 1|, |x| \leq 1$ . 63.  $y = 3x^2 + |x^2 - 2x - 1|, |x| \leq 3$ . 64.  $y = |2x^2 - x - 1| + |x^2 + x - 3|, -5 \leq x \leq 2$ .
65. Для каких значений параметра  $a$  наименьшее значение функции  $y = x^2 - (a + 2)x + a^2$  на отрезке  $[-1; 1]$  равно 4?

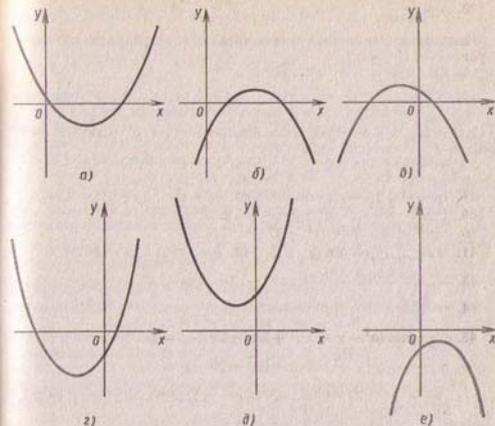


Рис. 18

66. Найдите  $x$ , при котором  $\min(a^2 - 2ax + 3x) = \max(-b^2 + 4bx - 3x^2 + 1)$ .
67. Найдите  $x$ , при котором  $\max \min(a^2 - 2ab - b^2 - 2ax + 10bx) = 7$ .
68. Докажите, что при изменении  $a$  вершина параболы  $y = x^2 + (2a + 1)x + a^2 - 1$  описывает прямую линию.
69. Докажите, что при изменении  $a$  вершина параболы  $y = x^2 - (2a + 1)x + 2a$  описывает параболу.
70. Найдите все значения  $a$ , при которых вершины парабол  $y = x^2 - 2(a + 1)x + 1$  и  $y = ax^2 - x + a$  лежат по разные стороны от прямой  $y = \frac{3}{4}$ .
71. Найдите все значения  $a$ , при которых вершины парабол  $y = x^2 - 2ax$  и  $y = x^2 - (a + 3)x + 1$  лежат по разные стороны от прямой  $y = 2x$ .
72. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2 + px + q = 0$ . Найдите:  
а)  $x_1^2 + x_2^2$ ; б)  $x_1^3 + x_2^3$ ; в)  $\frac{1}{q - x_1} + \frac{1}{q - x_2}$ ; г)  $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}}$ .

73. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2 + px + q = 0$ . Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются: а)  $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ ; б)  $x_1^2, x_2^2$ ; в)  $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_1}$ ; г)  $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}$ .
74. При каких значениях параметра  $a$  корни уравнения  $(a + 2)x^2 - ax - a = 0$  симметричны относительно точки  $x = 1$ ?
75. При каких значениях параметра  $a$  сумма корней уравнения  $ax^2 + x - 8a + 4 = 0$  меньше 1, а произведение больше  $a^2$ ?  
Найдите наибольшее и наименьшее значения функции (76–77).
76.  $y = 2 - ax - 3x^2$  на отрезке  $[-1; 1]$ .
77.  $y = 2x^2 - 2ax + 1$  на отрезке  $[-1; 1]$ .
- Найдите наименьшее значение выражения  $x_1^2 + x_2^3$ , если  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения (78–79). Замечание. Возможно равенство  $x_1 = x_2$ .
78.  $x^2 - ax + 2a - 3 = 0$ .
79.  $x^2 - 2ax + a + 6 = 0$ .
80. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2 + x\sqrt{a - a^2} + 2 - 2a^2 + 3a = 0$ . Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения  $x_1^2 + x_2^2$  (см. замечание в предыдущем задании).
81. Найдите все значения  $a \geq 1$ , при каждом из которых больший корень уравнения  $x^2 - 6x + 2ax + a - 13 = 0$  принимает наибольшее значение.
82. Даны изображения графиков двух функций (рис. 19):  $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$  (I парабола) и  $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$  (II парабола). Определите, что больше:  $b_1$  или  $b_2$ .
83. Найдите уравнение прямой, проходящей через начало координат и касающейся параболы  $y = x^2 - x + 1$ .
84. Найдите уравнение прямой, параллельной прямой  $y = 2x$  и касающейся параболы  $y = 3x^2 + x - 2$ .  
Найдите уравнение прямой, касающейся каждой из двух парабол (85–86).
85.  $y = x^2 - 3x, y = -x^2 + 3x - 5$ .
86.  $y = 2x^2 - 3x + 1, y = x^2 + 7x - 6$ .

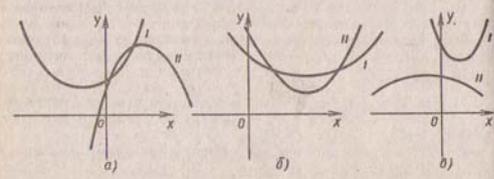


Рис. 19

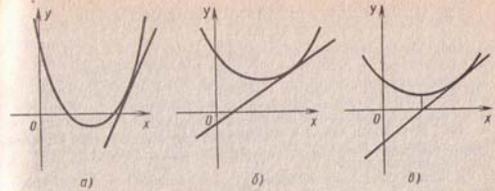


Рис. 20

87. Определите знак  $c$ , если  $a + b + c < 0$  и уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  не имеет корней.
88. Докажите, что если уравнения  $x^2 + ax + b = 0$  и  $x^2 + cx + d = 0$  не имеют корней, то уравнение  $x^2 + \frac{a+c}{2}x + \frac{b+d}{2} = 0$  также не имеет корней.
- Найдите значения параметра  $a$ , при которых уравнение имеет единственное решение (89–90).
89.  $(a - 1)x^2 + (a + 4)x + a + 7 = 0$ .
90.  $(2a - 5)x^2 - 2(a - 1)x + 3 = 0$ .
91. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $(2a - 1)x^2 + ax + 2a - 3 = 0$  имеет не более одного решения. При каких значениях параметра  $a$  уравнение имеет два различных корня? Определите знаки этих корней в зависимости от  $a$  (92–97).
92.  $(a - 2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$ .
93.  $(a - 3)x^2 - 2(3a - 4)x + 7a - 6 = 0$ .
94.  $x^2 - 2(a - 1)x + 2a + 1 = 0$ .
95.  $x^2 + 2x - 8 = a(x - 4)$ .
96.  $(a + 5)x^2 + (2a - 3)x + a - 10 = 0$ .
97.  $(3a - 1)x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0$ .
98. Нет ли ошибки в изображениях графиков функций  $y = ax^2 + bx + c$  и  $y = 2ax + b$  (рис. 20, парабола и прямая касаются)?
99. При каких  $a$  и  $b$  числа  $(a + b)$  и  $(a - b)$  удовлетворяют уравнению  $x^2 - (b + 1)x + a + b - 2 = 0$ ?
100. Разложите на множители  $(x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz$ . Докажите тождество (101–104).
101.  $(x - y)(xz + 1)(yz + 1) + (y - z)(yx + 1)(zx + 1) + (z - x)(zy + 1)(xy + 1) = (x - y)(y - z)(z - x)$ .
102.  $\frac{(x - a)(x - b)}{(c - a)(c - b)} + \frac{(x - b)(x - c)}{(a - b)(a - c)} + \frac{(x - c)(x - a)}{(b - c)(b - a)} = 1$ .

103.  $c \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + a \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} = x$ .
104.  $4(x+y+z)^2 - 15(xy+yz+zx) - x^2 - y^2 - z^2 = 108xyz$ .
105. Докажите, что если уравнение  $x^2+px+q=0$  имеет два корня, то уравнения  $x^2+(p+2a)x+q+ap=0$ ,  $3x^2+2(p+a)x+q+ap=0$  также имеют различные корни при любом  $a$ .
106. Докажите, что при любом  $a$  хотя бы одно из двух уравнений  $x^2-(a^2-a)x+a-2=0$ ,  $x^2+(2-a^2)x+a^2-a-1=0$  имеет два различных корня.
- Докажите, что для любых попарно неравных  $a, b$  и  $c$  уравнение имеет решение (107–108).
107.  $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$ .
108.  $\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} + \frac{c}{x-c} = 0$ ,  $abc \neq 0$ .
109. Докажите неравенство (109–113).
109.  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ .
110.  $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 \geq 6xy - 8xz + 8yz$ .
111.  $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$  ( $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ ).
112.  $\sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{2ab}$ .
113.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$  ( $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ ).
114. Найдите все  $a$ , для которых существует такое  $b$ , что при всех  $c$  выражение  $b^2 - 4ab + 2ac - c^2 - 2b$  отрицательно.
115. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2+px+q=0$ ,  $x_1 < x_2$ . Докажите, что если  $t$  удовлетворяет неравенствам  $x_1 \leq \frac{t-q}{2t+p} \leq x_2$ , то  $t$  равно  $x_1$  или  $x_2$ .
116. Найдите  $a, b$  и  $c$ , если известно, что любой корень уравнения  $x(x-a)(x-b)=0$  удовлетворяет также уравнению  $(a-1)x^2+(a+b-3)x+a+b+c=0$ .
117. Известно, что для функции  $f(x)=ax^2+bx+c$  выполнены неравенства  $f(-3) < -5$ ,  $f(-1) > 0$ ,  $f(1) < 4$ . Определите знак  $a$ .
118. Известно, что для функции  $f(x)=ax^2+bx+c$  выполнены неравенства  $f(-1) < 1$ ,  $f(1) > -1$ ,  $f(3) < -4$ . Определите знак  $a$ .
119. Для каких  $p$  существует  $q$ , такое, что уравнение  $x^2+px+q=0$  имеет один корень на отрезке  $[1; 2]$  и один корень на отрезке  $[5; 7]$ ?
120. Найдите все значения  $a$ , для которых один корень уравнения  $2ax^2-2x-3a-2=0$  больше 1, другой меньше 1.
121. При каких значениях  $a$  существует единственный корень уравнения  $x^2-ax+2=0$ , удовлетворяющий условию  $1 < x < 3$ ?
122. При каких значениях  $a$  уравнение  $(a-1)x^2-2ax+2-3a=0$  имеет единственное решение, удовлетворяющее неравенству  $x > 1$ ?

123. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(a-1)x^2 - (a+1)x + a = 0$  имеет единственное решение, удовлетворяющее условию  $0 < x < 3$ ?
124. При каких  $a$  уравнение  $2x^2 - 2(2a+1)x + a(a-1) = 0$  имеет два корня  $x_1$  и  $x_2$ ,  $x_1 < x_2$ , причем  $x_1 < a < x_2$ ?
125. Сколько корней больше  $-1$  в зависимости от параметра  $a$  имеет уравнение  $x^2 + (2a+6)x + 4a + 12 = 0$ ?
126. Сколько корней меньше 1 имеет уравнение  $(1+a)x^2 - 3ax + 4a = 0$  в зависимости от  $a$ ?
127. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых все корни уравнения  $(2-a)x^2 - 3ax + 2a = 0$  больше  $\frac{1}{2}$ .
128. Найдите все значения  $a$ , при которых все корни уравнения  $x^2+x+a=0$  больше  $a$ .
129. При каких  $a$  все корни уравнения  $x^2-2ax+a^2-a=0$  расположены на отрезке  $[-2; 6]$ ?
130. При каких  $a$  все корни уравнения  $x^2-2ax+a^2-2=0$  расположены на отрезке  $[2; 5]$ ?
- Сколько решений, удовлетворяющих заданным ограничениям, имеет уравнение в зависимости от  $a$  (131–135)?
131.  $(2a+3)x^2+(a-1)x+4a+3=0$ ,  $0 < x < 2$ .
132.  $4x^2-2x+a=0$ ,  $|x| \leq 1$ .
133.  $x^2-2ax-1=0$ ,  $|x| \leq 2$ .
134.  $ax^2-(a^2+2a^2+1)x+a(a+2)=0$ ,  $0 < x \leq 1$ .
135.  $(4-a)x^2-6ax+3=0$ ,  $-1 \leq x < 2$ .
136. При каких значениях  $a$  для всех  $x$ , таких, что  $1 < x < 2$ , выполняется неравенство  $x^2+ax+a^2+6a < 0$ ?
137. Найдите все значения параметра  $a$ , для которых неравенство  $x^2-ax+a > 0$  верно при всех  $|x| < 1$ .
138. Для каких  $a$  неравенство  $(x-3a)(x+2a+1) < 0$  выполняется для всех  $x$ , таких, что  $1 \leq x \leq 3$ ?
139. Для каких  $a$  неравенство  $\frac{x+a}{a(x+b)} \geq 1$  выполняется для всех  $x$ , таких, что  $-1 \leq x \leq 1$ ?
140. При каких  $a$  неравенство  $x^2+ax-7a < 0$  выполняется при всех  $1 < x < 2$ ?
141. При каких  $a$ , если выполняется неравенство  $x^2 - a(1+a)x + a^2 < 0$ , то выполняется неравенство  $x^2 + 4x + 3 < 0$ ?
142. При каких значениях параметра  $a$  все решения неравенства  $ax^2 - 2x - a(a^2 + 2) < 0$  удовлетворяют также неравенству  $x^2 \leq 9$ ?
143. Найдите все значения  $a$ , при которых корни  $x_1$  и  $x_2$  уравнения  $x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0$  удовлетворяют условию  $-4 < x_1 < 0 < x_2 < 4$ .
- Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни  $x_1$  и  $x_2$  уравнения удовлетворяют условию  $x_1 < 2, x_2 > 3$  (144–145).
144.  $(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$ .

145.  $(\frac{3}{2}a-2)x^2 - 2(a-3)x + 4a^2 = 0$ .
146. Изобразите на координатной плоскости все точки, координаты которых  $(p; q)$  таковы, что уравнение  $x^2+px+q=0$  имеет действительные корни, по абсолютной величине не превосходящие 1.
147. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $(x-a)^2(a(x-a)^2-a-1) = -1$  имеет больше отрицательных корней, чем положительных.
148. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $((x-a)^2-2a-4)(x-a)^2 = -2a-3$  имеет больше положительных корней, чем отрицательных.
149. Найдите все значения параметра  $h$ , при которых уравнение  $x(x+1)(x+h)(x+1+h) = h^2$  имеет четыре корня.
150. Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение  $x^4 + (a-1)x^3 + x^2 + (a-1)x + 1 = 0$  имеет не менее двух отрицательных корней.
151. Существуют ли такие  $a$ , что оба корня уравнения  $a^2x^2 - 2a(2a+1)x + 1 - 16a^2 = 0$  лежат между 0 и 1?
152. Для каких  $a$  уравнение  $\frac{x}{(1+x)^2} + 2a\frac{\sqrt{x}}{1+x} + 1 = 0$  имеет решение?
- Решите уравнение (153–164).
153.  $(x+1)|x-1| = a$ .
154.  $x|x-4| + a = 0$ .
155.  $x|x+1| + a = 0$ .
156.  $\sqrt{2x+1} = x-a$ .
157.  $\sqrt{2ax-1} = x-1$ .
158.  $x + \sqrt{x} = a$ .
159.  $\sqrt{2x} - \sqrt{x-1} = a$ .
160.  $\sqrt{2x+2} - \sqrt{x-2} = a$ .
161.  $x + \sqrt{x(a-x)} = 1$ .
162.  $\sqrt{x} - \sqrt{x-a} = a$ .
163.  $x + \sqrt{a+x} = a$ .
164.  $\sqrt{2x^2+(a-2)x-a^2-1} = x-1$ .
165. При каких  $a$  уравнение  $\sqrt{x+3} = 2x-a$  имеет единственный корень?
166. При каких  $a$  уравнение  $\sqrt{x+2a+1} = a + \frac{x}{a}$  имеет два корня?
167. При каких  $a$  уравнение  $\sqrt{2x-3} = a-3x$  не имеет решений?
168. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $|x^2-1| = 2x-x^2+a$  имеет единственное решение? Сколько корней в зависимости от  $a$  имеет уравнение (169–171)?
169.  $ax^2 + |x-1| = 0$ .
170.  $x^2 + a|x-2| = 0$ .
171.  $x^2 + 2|x-a| = 5$ .

172. При каких  $a$  уравнение  $|x^2-6x+8| + |x^2-6x+5| = a$  имеет более трех решений?
173. Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение  $|1-ax| = 1 + (1-2a)x + ax^2$  имеет один корень.
174. Для каждого значения параметра  $a$  найдите все значения  $x$ , удовлетворяющие уравнению  $(x-3)(x+1) + 3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = (a-1)(a+2)$ , и найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение имеет единственный корень.
175. Для каждого значения параметра  $a$  найдите все значения  $x$ , удовлетворяющие уравнению  $(x+2)(x+4) + 5(x+2)\sqrt{\frac{x+4}{x-2}} - (a+2)(a-3) = 0$ , и найдите все значения  $a$ , при которых уравнение имеет единственный корень.
176. Определите все значения параметра  $a$ , для которых уравнение  $x|x-2a| + 1 - a = 0$  имеет единственное решение.
177. Определите все значения параметра  $a$ , для которых уравнение  $x^2 + 4x - 2|x-a| + 2 - a = 0$  имеет два решения.
178. Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых существует только одно значение  $x$ , удовлетворяющее системе уравнений  $\begin{cases} |x^2-5x+4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10|x| = 0, \\ x^2 - 2(a-1)x + a(a-2) = 0. \end{cases}$
179. Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых существует только одно значение  $x$ , удовлетворяющее системе  $\begin{cases} |x^2-7x+6| + x^2 + 5x + 6 - 12|x| = 0, \\ x^2 - 2(a-2)x + a(a-4) = 0. \end{cases}$
- При каких значениях  $a$  неравенство выполняется при любых значениях  $x$  (180–183)?
180.  $(a+4)x^2 - 2ax + 2a - 6 < 0$ .
181.  $(a-3)x^2 - 2ax + 3a - 6 > 0$ .
182.  $(a^2-1)x^2 + 2(a-1)x + 2 > 0$ .
183.  $|\frac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}| < 3$ .
- Решите неравенство (184–191).
184.  $x^2 + ax + a > 0$ .
185.  $x^2 + 2x + a < 0$ .
186.  $x^2 + ax + 1 > 0$ .
187.  $2|x-a| < 2ax - x^2 - 2$ .
188.  $x^2 + 2ax + 1 > a|x+a|$ .
189.  $\frac{2a}{x} - \frac{1}{x-1} > 1$ .
190.  $\sqrt{2x+a} \geq x$ .
191.  $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a$ .
192. При каких  $a$  при всех  $\frac{1}{4} \leq x \leq 1$  выполняется неравенство  $x + \sqrt{x^2 - 2ax} > 1$ ?
193. Докажите, что если  $a > 0$  и для какого-то  $x$ , удовлетворяющего

ющего условиям  $a \leq x \leq 2a$ , выполняется неравенство  $x^2 + 2(2a-1)(a-x) - 4 > 0$ , то  $a > 2$ .

194. Найдите все  $x$ , при которых для всех  $|a| \leq 2$  выполняется неравенство  $\frac{ax^2 - 3 - x}{25 + 8ax^2} < 0$ .

195. Найдите все значения  $a$ , при которых неравенство  $3 - |x-a| > x^2$  имеет хотя бы одно отрицательное решение.

196. Найдите все значения  $a$ , при которых неравенство  $|x+a| + x^2 < 2$  имеет хотя бы одно положительное решение.

197. При каком значении параметра  $a$  уравнения  $x^2 + ax + 1 = 0$  и  $x^2 + x + a = 0$  имеют общий корень?

198. При каких значениях параметра  $a$  уравнения  $3ax^2 - 5x + 2a = 0$  и  $2x^2 + ax - 3 = 0$  имеют общий корень?

199. При каком значении параметра  $a$  один из корней уравнения  $x^2 - 5x + a = 0$  будет вдвое больше одного из корней уравнения  $x^2 - 7x + 2a = 0$ ?

200. Известно, что уравнения  $x^2 + px + q = 0$  и  $x^2 + p_1x + q_1 = 0$  имеют общий корень. Составьте квадратное уравнение, корнями которого были бы два оставшихся корня данных уравнений.

201. Даны два уравнения  $x^2 + 2x + a = 0$ ,  $(1+a)(x^2 + 2x + a) - 2(a-1)(x^2 + 1) = 0$ . Докажите, что если одно из этих уравнений не имеет решения, то другое имеет решение.

Для всех  $a \geq 0$  решите неравенство (202–204).

202.  $4a^2x^4 + 4a^2x^2 + 32x + a + 8 \geq 0$ .

203.  $a^2x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 \geq 0$ .

204.  $x^4 + ax^2 + a^2x - a^3 \leq 0$ .

205. Для всех значений параметра  $a$  решите неравенство  $2x^2 + x - a - 8 \leq |x^2 + 2x - 2a - 4|$ .

206. Среди точек плоскости, координаты которых  $(x; y)$  удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y - 2x \geq 0, \\ -x^2 + 2ax - a^2 + a + 1 - y \geq 0, \end{cases}$$

найдите точку с наибольшей ординатой в зависимости от  $a$ . При каком  $a$  эта ордината будет наибольшей?

207. При каких значениях  $a$  каждое решение неравенства  $x^2 - 3x + 2 < 0$  будет содержаться среди решений неравенства  $ax^2 - (3a+1)x + 3 \geq 0$ ?

208. Для каких  $a$  любое решение неравенства  $x^2 - x - 2 < 0$  больше любого решения неравенства  $ax^2 - 4x - 1 \geq 0$ ?

209. Для каких  $a$  любое решение неравенства  $x^2 - (a-1)x + 1 + a < 0$  меньше, чем любое решение неравенства  $x^2 - (a+1)x + 3a + 1 \leq 0$ ? (Предполагается, что каждое из неравенств имеет решение.)

210. При каких  $a$  множество решений неравенства  $x^2 - (a+1)ax + a^3 \leq 0$  содержит не менее пяти целых значений  $x$ ?

134

211. При каких  $a$  множество решений неравенства  $x(x-4) + a^2(a+4) \leq ax(a+1)$  содержит не более четырех целых значений  $x$ ?

Найдите наибольшее и наименьшее значение функций (212–214).

212.  $y = \frac{2x+1}{x^2-x+1}$ . 213.  $y = \frac{-x^2+2x-1}{6x^2-7x+3}$ . 214.  $y = \frac{x}{x^2+|x-1|}$ .

215. При каком значении параметра  $a$  наибольшее значение функции  $y = \frac{x^2+a}{4(x^2-x+1)}$  равно наименьшему значению функции  $y = \frac{x^2+\sqrt{3}x+2a}{x^2+1}$ ?

216. Найдите все значения параметра  $a$ , удовлетворяющие условию  $-1 < a < 1$ , для каждого из которых выражение  $1 + 2\sqrt{x^2 - 2axy + y^2} - 6y + 10$  принимает наименьшее значение только для одной пары  $x, y$ .

217. Найдите наибольшее значение выражения  $x + 2y$ , если  $x, y$  отрицательны и удовлетворяют неравенству  $x^2 - 4xy + y^2 + 3 \leq 0$ .

218. Найдите наибольшее и наименьшее значения, которые может принимать  $x + 2y$ , если  $3x^2 - 2xy + 4y^2 \leq 5$ .

219. Найдите наибольшее значение  $3x + 2y$ , если  $x$  и  $y$  неположительны и  $2x^2 - xy + 3y^2 \leq 4$ .

220. Найдите наибольшее и наименьшее значения, которые может принимать выражение  $2x^2 + 3xy + 4y^2$ , если  $x^2 - xy + 2y^2 = 3$ .

221. Найдите наименьшее значение, которое может принимать выражение  $2x^2 - 2xy + y^2$ , если  $x^2 - 2xy - 3y^2 = 4$ .

222. При каких  $a$  неравенство  $\frac{x-3}{ax^2-4x+a-3} < 1$  выполняется при всех  $x$ ?

223. При каких  $a$  неравенство  $x^2 - |x-a| - |x-1| + 3 \geq 0$  выполняется при всех  $x$ ?

224. При каких  $a$  неравенство  $x^2 + x + |x-a| + \frac{2}{9} \leq 0$  имеет хотя бы одно решение?

225. Найдите все значения параметра  $a$ , для которых наименьшее значение функции  $y = x^2 + |x-a| + |x-1|$  больше 2.

226. Найдите все значения  $a$ , при которых наименьшее значение функции  $y = ax + |x^2 - 4x + 3|$  больше 1.

227. Найдите все значения  $a$ , при которых наименьшее значение функции  $y = 3|x-a| + |x^2 + x - 2|$  меньше 2.

228. Найдите все значения  $a$ , при которых наименьшее значение функции  $y = x^2 + 2|x+a-1| + (a+1)^2$  меньше 3.

229. Докажите, что кривая  $y = -x^2 - 4x - 2$  не пересекается с прямой  $y = 2x + 12$ . Найдите расстояние между их ближайшими точками.

135

230. Найдите кратчайшее расстояние от точек параболы  $y = -x^2 - 8x + 16$  до прямой  $y = -2x + 1$ .

231. Найдите все  $x$ , которые являются корнем хотя бы одного уравнения вида  $x^2 + px + q = 0$ , где  $|p| \leq 1$ ,  $|q| \leq 1$ .

232. Найдите все такие  $q$ , что для любого  $p$  уравнение  $x^2 + px + q = 0$  имеет хотя бы один корень.

Расположите по порядку в зависимости от  $a$  корни уравнений (233–235).

233.  $x^2 + \frac{3x}{a} + 2a = 0$  и  $x^2 + \frac{12x}{a} - a = 0$ .

234.  $x^2 + 4x + 2a = 0$  и  $x^2 + 3x + 3a = 0$ .

235.  $x^2 - 4ax - 5a^2 = 0$  и  $x^2 - 2ax - 1 = 0$ .

236. При каких  $a$  для любого  $x$  выполняется хотя бы одно из двух неравенств  $x^2 + 5a^2 + 8a > 2(3ax + 2)$ ,  $x^2 + 4a^2 \geq a(4x + 1)$ ?

237. При каких  $a$  существует хотя бы одно значение  $x$ , удовлетворяющее неравенствам  $x > 1$ ,  $3 - |x-a| > x^2$ ?

Найдите все значения параметра  $a$ , при которых не существует ни одного  $x$ , одновременно удовлетворяющего неравенствам (238–239).

238.  $\begin{cases} (x-a)(ax-2a-3) \geq 0, \\ ax \geq 4. \end{cases}$

239.  $\begin{cases} ax^2 + (a-3)x + \frac{2}{a} - 2a \geq 0, \\ ax \geq a^2 - 2. \end{cases}$

240. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система неравенств  $\begin{cases} y \geq x^2 + a, \\ x \geq y^2 + a \end{cases}$  имеет единственное решение.

Решите систему неравенств (241–242).

241.  $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 + a < 0, \\ 2x + a + 6 > 0. \end{cases}$  242.  $\begin{cases} x^2 - x - 2 + a \leq 0, \\ x^2 - 2x - 3 + 2a > 0. \end{cases}$

243. Найдите все значения  $a$ , при которых система неравенств  $\begin{cases} x^2 + 2x + a \leq 0, \\ x^2 - 4x - 6a \leq 0 \end{cases}$  имеет единственное решение.

244. Найдите все значения  $a$ , при которых решения системы неравенств  $\begin{cases} x^2 - 2x \leq a - 1, \\ x^2 - 4x \leq 1 - 4a \end{cases}$  образуют на числовой оси отрезок длины единицы.

245. Найдите все значения  $a$ , при которых решения системы неравенств  $\begin{cases} x^2 + 6x + 7 + a \leq 0, \\ x^2 + 4x + 7 \leq 4a \end{cases}$  образуют на числовой оси отрезок длины единицы.

246. Числа  $r, s, t$  таковы, что  $r < s < t$ . Кроме того, известно, что если любое из них подставить вместо  $y$  в равенство  $x^2 - (9-y)x + y^2 - 9y + 15 = 0$ , то по меньшей мере одно из двух оставшихся чисел будет содержаться среди корней полученного квадратного уравнения. Докажите, что  $-1 < r < 1$ .

136

247. Числа  $a, b, c$  таковы, что  $a < b < c$ . Кроме того, известно, что если любое из них подставить вместо  $y$  в равенство  $x^2 - \frac{3y-1}{y^2}x + \frac{1}{y} = 0$ , то по меньшей мере одно из двух оставшихся чисел будет содержаться среди корней полученного квадратного уравнения. Докажите, что  $-2 < b < 0$ .

248. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система неравенств  $\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \frac{1-a}{1+a} \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2 \end{cases}$  имеет решение.

249. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система неравенств  $\begin{cases} 5x^2 - 4xy + 2y^2 \geq 3, \\ 7x^2 + 4xy + 2y^2 \leq \frac{2a-1}{2a+5} \end{cases}$  имеет решение.

250. Для каких  $p$  существует  $q$ , такое, что  $|x^2 + px + q| \leq 1$ , если  $|x| \leq 1$ ?

251. Докажите, что на отрезке  $[-1; 1]$  наибольшее значение функции  $y = |x^2 + px + q|$  не меньше чем  $\frac{1}{2}$ . Для каких  $p$  и  $q$  наибольшее значение этой функции равно  $\frac{1}{2}$ ?

252. Пусть  $f(x) = x^3 - 2$ . Докажите, что уравнение  $f(f(f(x))) = x$  имеет восемь корней.