Арифметика – 6

Д/З

1. $31,28(576) = \frac{m}{n}$

$$
\begin{array}{r}
1000x = 31285,76(576) \\
- \quad x = 31,28(576) \\
\hline
999x = 31254,48
\end{array}
$$

$$x = \frac{3125448}{99900} = \frac{86818}{2775}$$

2. $\frac{3}{5} = 0,6 = 0,3_5 = 0,(1001)_2 = 0,(1210)_3 =$

$= 0,(4125)_7 = 0,(4631)_8 =$

$= 0,(7a52)_{13} = 0,(9)_{16} =$

$= 0,(a36d)_{17}$

2

3	5
1	1
2	0
4	0
3	1

3

3	5
4	1
2	2
1	1
3	0

7

3	5
1	4
2	1
4	2
3	5

8

3	5
4	4
2	6
1	3
3	1

13

3	5
4	7
2	10
1	5
3	2

16

3	5
3	9

17

3	5
1	10
2	3
4	6
3	13

$\frac{3}{7} = 0,(011)_2 = 0,(102120)_3 = 0,(203241)_5 =$

$= 0,3_7 = 0,(3)_8 = 0,(428571) =$

$= 0,(57)_{13} = 0,(6db)_{16} = 0,(74e9c2)_{17}$

5

3	7
1	2
5	0
4	3
6	2
2	4
3	1

13

3	7
4	5
3	7

Арифметика - 6

3) $3,(216)_7 = \dfrac{m_7}{n_7} = \dfrac{m_{10}}{n_{10}}$

$$
\begin{array}{r}
1000x = 3216,(216) \\
- \quad x = \quad 3,(216) \\
\hline
666x = 3213
\end{array}
$$

$$x = \frac{3213_7}{666_7} = \boxed{\frac{379}{114} = \frac{1051_7}{222_7}}$$

Вещественные числа

1) 1872г Три определения:
Кантора, Вейерштрасса, Дедекинда

1) Вейерштрасс

Опред. Вещественное число - бесконечная десятичная дробь

$$\alpha = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

$$a_0 \in \mathbb{Z},\ a_0 \geq 0, \quad a_1, a_2 \ldots a_n \ldots \in \{0, 1 \ldots 9\}$$

На числовой оси α лежит между рац. числами

$$\pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \text{ и } \pm (a_0, a_1 a_2 \ldots a_n + 10^{-n})$$

$$\forall n = 0, 1, 2 \ldots$$

Сравнение Пусть даны $\alpha = + a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$

$\beta = + b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$

$$
\left[
\begin{array}{l}
a_0 < b_0 \Rightarrow \alpha < \beta \\
a_0 > b_0 \Rightarrow \alpha > \beta \\
a_0 = b_0 \longrightarrow \text{сравнение след. разряда}
\end{array}
\right.
$$

Если $\alpha \neq \beta$, то $\exists n: a_n \neq b_n$

$$a_n < b_n \Rightarrow \alpha < \beta$$
$$a_n > b_n \Rightarrow \alpha > \beta.$$

При этом $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n (9) = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n + 10^{-n}$

<u>Сложение</u> $\alpha + \beta$ – число, удовлетворяющее условию

$$\forall a', a'', b', b'' \in \mathbb{Q}$$
$$(a' \leq \alpha \leq a'') \wedge (b' \leq \beta \leq b'') \Rightarrow (a' + b' \leq \alpha + \beta \leq a'' + b'')$$

<u>Умножение</u> аналогично.

2) <u>Дедекинд</u>

<u>определение</u> Сечение в множестве $\mathbb{Q}$ – любое разбиение $\mathbb{Q}$ на два непустых класса – нижний A и верхний A' так, что

$$\mathbb{Q} = A \cup A' \wedge A, A' \neq \emptyset \wedge$$
$$\forall a \in A, \forall a' \in A' \ (a < a')$$

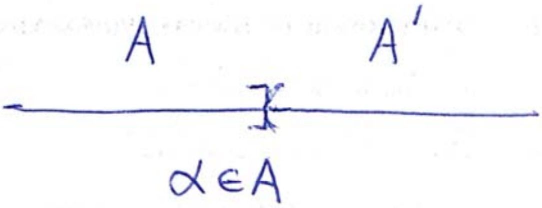
Если $\exists \alpha = \max\limits_{A}\{a\}$ или $\exists \alpha = \min\limits_{A'}\{a'\}$,

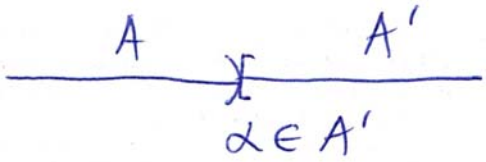
то α – рацион. число, производящее сечение $\mathbb{Q}$

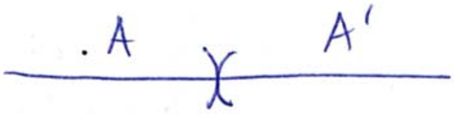
Если $\nexists \alpha = \max\limits_{A}\{a\}$ и $\nexists \alpha = \min\limits_{A'}\{a'\}$,

то данное сечение определяет <u>иррациональное</u> число α:

$$\forall a \in A, \forall a' \in A' \ (a < \alpha < a')$$

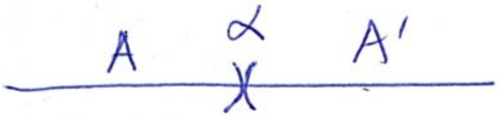


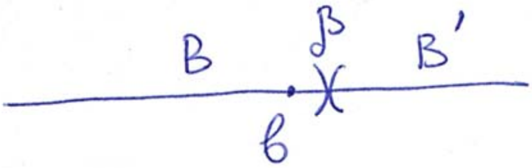




α - иррациональное

Сравнение





Пусть α разделяет A и A', β разделяет B и B'

Если $\exists b \in B: \forall a \in A \ (b > a) \Rightarrow \beta > \alpha$

Если $\exists a \in A: \forall b \in B \ (a > b) \Rightarrow \alpha > \beta$

Сложение и умножение аналогично Вейерштрассу

Рациональные + иррациональные = вещественные

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

Арифметика – 6

Свойство Иррац. числа $\neq \frac{m}{n}$

Алгебраические числа – корни многочленов с целыми коэффициентами

$-1;\ 2;\ \sqrt{2}$

Остальные – **трансцендентные** $\pi,\ e,\ \sqrt{\pi}$

Рацион.	Иррацион.
Алгебраич.	Трансценд.

Примеры Доказать, что $\sqrt{2}$ иррац.

Пусть $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ – несокр. дробь.

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m = 2m_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4m_1^2 = 2n^2 \Rightarrow 2m_1^2 = n^2 \Rightarrow n = 2n_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\cancel{2}m_1}{\cancel{2}n_1} \quad \times$$

Доказать, что $\sqrt{3}$ иррац.

Пусть $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$ – несокр. дробь

$$3 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 3n^2 \Rightarrow m = 3m_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9m_1^2 = 3n^2 \Rightarrow 3m_1^2 = n^2 \Rightarrow n = 3n_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\cancel{3}m_1}{\cancel{3}n_1} \quad \times$$

Арифметика-6

Доказать, что $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ иррац.

Пусть $\sqrt{6} = \frac{m}{n}$

$6 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow \quad m = 6m_1, \; n = 6n_1$

$\frac{m}{n} = \frac{\cancel{6}m_1}{\cancel{6}n_1}$ $\not{0}$

Вопрос

$r_1 + r_2 = r \qquad x_1 + r_2 = x$

$r_1 \cdot r_2 = r \qquad x_1 \cdot r_2 = x$

$x_1 + x_2 = ? \qquad \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$

$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$x_1 \cdot x_2 = ? \qquad \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{6}$

Доказать, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ иррац.

Пусть $\sqrt{2}+\sqrt{3} = r$

$2 + 3 + 2\sqrt{6} = r^2 \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{r^2-5}{2}$ $\not{0}$

Свойства множества вещественных чисел

Свойство 1 Множество $\mathbb{R}$ несчетно.

Докажем для $(0;1)$

Пусть счетно: $x_1 = 0,a_{11}a_{12}\ldots a_{1k}\ldots$

$x_2 = 0,a_{21}a_{22}\ldots a_{2k}\ldots$

$\vdots$

$x_n = 0,a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nk}\ldots$

$\vdots$

Все одновременно $\neq 0, \neq 9$

Строим число $x = 0{,}b_1 b_2 \ldots b_k \ldots$

$b_k \neq 0,\ \neq 9,\ \neq a_{kk}.$

$x \neq 0,\ \neq 1,\ \neq$ ни одному x_n $\cancel{\bigcirc}$

Свойство 2

Множество $\mathbb{R}$ всюду плотно

$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \exists\ r$ и $x \in (a, b)$

Докажем для $b > a > 0$

1) $\exists n \in \mathbb{N}:\ n > \dfrac{1}{b-a} \Rightarrow \dfrac{1}{n} < b-a$

$\exists m:\quad a < \dfrac{m}{n} < b$ — r - рац. число

2) $\exists n \in \mathbb{N}:\ n > \dfrac{\sqrt{2}}{b-a} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{n} < b-a$

$\exists k:\quad a < \dfrac{\sqrt{2}k}{n} < b$ — x - иррац. число

Арифметика - 6

Задачи

① $\dfrac{(5\sqrt{3}+\sqrt{50})(5-\sqrt{24})}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}} = 1$

② $\dfrac{\sqrt{34-24\sqrt{2}}}{\sqrt{18-8\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$

1) $3+2\sqrt{2} = (x+y\sqrt{2})^2 = x^2+2xy\sqrt{2}+2y^2$

$\begin{cases} x^2+2y^2=3 \\ xy=1 \end{cases}$ $\boxed{x=y=1}$

$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$

2) $\sqrt{18-8\sqrt{2}} = (x-y\sqrt{2})^2 = x^2-2xy\sqrt{2}+2y^2$

$\begin{cases} x^2+2y^2=18 \\ xy=4 \end{cases}$ $\begin{matrix} x=4 \\ y=1 \end{matrix}$ $\sqrt{18-8\sqrt{2}} = 4-\sqrt{2}$

3) $\sqrt{34-24\sqrt{2}} = (x-y\sqrt{2})^2 = x^2-2xy\sqrt{2}+2y^2$

$\begin{cases} x^2+2y^2=34 \\ xy=12 \end{cases}$ $\begin{matrix} x=3 \\ y=4 \end{matrix}$ или $\begin{matrix} x=-3 \\ y=-4 \end{matrix}$

$\sqrt{34-24\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}-4 > 0$

$\dfrac{3\sqrt{2}-4}{4-\sqrt{2}-\sqrt{2}-1} = \dfrac{3\sqrt{2}-4}{3-2\sqrt{2}} = \dfrac{(3\sqrt{2}-4)(3+2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} =$

$= 9\sqrt{2}+12-12-8\sqrt{2} = \sqrt{2}$

Арифметика – 6

Формула $\sqrt{a+\sqrt{b}} = ?$

$$a+\sqrt{b} = x+y\sqrt{b} = x^2+by^2+2xy\sqrt{b}$$

$$\begin{cases} x^2+by^2=a \\ 2xy=1 \end{cases} \qquad y=\frac{1}{2x}$$

$$x^2+\frac{b}{4x^2}-a=0 \qquad 4x^4-4ax^2+b=0$$

$$x^2=\frac{4a\pm\sqrt{16a^2-16b}}{8}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-b}}{2}$$

$$y^2=\frac{a-x^2}{b}=\frac{1}{b}\left(a-\frac{a}{2}\mp\frac{\sqrt{a^2-b}}{2}\right)=\frac{a\mp\sqrt{a^2-b}}{2b}$$

$$x=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\ ;\quad y=\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2b}}\ ;\quad y\sqrt{b}=\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$$\boxed{\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}}$$

Д/З

1. $\sqrt{\sqrt{6-2\sqrt5}+\sqrt{9-4\sqrt5}+\sqrt{14-6\sqrt5}+\sqrt{21-8\sqrt5}} = 2$

2. $\sqrt{3-2\sqrt2}+\sqrt{4+2\sqrt3}+\sqrt{5-2\sqrt6} = 2\sqrt3$

3. $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{2-\sqrt3}+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{2+\sqrt3} = 1$

4. $\dfrac{2+\sqrt3}{\sqrt2+\sqrt{2+\sqrt3}}+\dfrac{2-\sqrt3}{\sqrt2-\sqrt{2-\sqrt3}} = \sqrt2$