Дополнительное задание на лето (алгебра, 10 класс, 2018г.)

Делимость, задачи на логику и алгоритмы:

1. Решить в целых числах $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$
2. Найдите все натуральные пары чисел (x,y), удовлетворяющие условию $2011x+2010y=5xy$.
3. Найти шестизначное число, которое при умножении на 2, 3, 4, 5 и 6 даёт шестизначные числа, написанные теми же цифрами, что и само число, но в другом порядке.
4. Найдите наименьшее шестизначное натуральное число, которое увеличивается в целое число раз (большее 1) при переносе его последней цифры в начало (последняя цифра не может быть 0).
5. Найти все решения уравнения $[x]^2 + 5x - 4 = 0$, где $[x]$ - целая часть числа x (наибольшее целое число, не превосходящее x).

Тригонометрия:

6. Решить уравнение $tgx + ctg2x = 2ctg4x$
7. Решить уравнение $\sqrt{5 - \cos 2x} = \cos x - 3\sin x$
8. Известно, что $a + b + c = \pi$ и $\sin a : \sin b : \sin c = 4 : 5 : 6$. Найти $\cos a : \cos b : \cos c$
9. Решить неравенство $\sqrt[4]{\frac{5+3cos4x}{8}} > -cosx$
10. Известно, что уравнение $8x^3 - 6x - 1 = 0$ имеет три действительных корня, не превосходящих по модулю единицы. Чему будет равен результат, если к произведению максимального и минимального корней исходного кубического уравнения прибавить половину максимального корня заданного уравнения

Комплексные числа, алгебраические уравнения, задачи с параметрами:

11. Решить уравнение в действительных числах: $z^5 - 2z^4 - 13z^3 + 26z^2 + 36z - 72 = 0$.
12. Найдите коэффициенты a и b, при которых многочлен $ax^4 + bx^3 + 1$ делится нацело на $(x-1)^2$.
13. Число $a \neq 0$ выбрано таким образом, чтобы уравнение $x^6 + (x+a)^6 - a^3 = 0$ имело единственное решение (вещественное). Чему равно число a?
14. Подобрать такое действительное число A, чтобы корни уравнения $x^3 + 3x^2 + A = 0$ являлись тремя последовательными членами арифметической прогрессии.
15. Изобразить на комплексной плоскости множество всех точек z, удовлетворяющих условию:
$$\operatorname{Re}\frac{3}{z} \geq \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z} - 1\right).$$
16. Может ли точка $z = 0$ принадлежать какому-нибудь многоугольнику вершины которого находятся в точках $z_k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{k-1}, |z| < 1$?
17. При каких значениях параметра θ система линейных уравнений имеет бесконечно много решений:

$$\begin{cases} 2\cos\theta \cdot x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + 2\cos\theta \cdot x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + 2\cos\theta \cdot x_3 + x_4 = 0, \\ \dots \\ x_7 + 2\cos\theta \cdot x_8 + x_9 = 0, \\ x_8 + 2\cos\theta \cdot x_9 = 0. \end{cases}$$