Дополнительное задание на лето (алгебра, 10 класс, 2016г.)

Делимость, задачи на логику и алгоритмы:

1. Решить в целых числах $3\cdot 2^m+1=n^2$
2. Найдите все натуральные пары чисел (x,y), удовлетворяющие условию $2011x+2010y=5xy$.
3. Найдите все пары натуральных чисел (x, y), произведение которых делится нацело на их сумму.
4. Найти шестизначное число, которое при умножении на 2, 3, 4, 5 и 6 даёт шестизначные числа, написанные теми же цифрами, что и само число, но в другом порядке.
5. Найдите наименьшее шестизначное натуральное число, которое увеличивается в целое число раз (большее 1) при переносе его последней цифры в начало (последняя цифра не может быть 0).
6. Найти все решения уравнения $[x]^2+5x-4=0$, где $[x]$ - целая часть числа x (наибольшее целое число, не превосходящее x).

7. Даны три утверждения:
    a. Уравнение $x+\dfrac{1}{x}=a$ не имеет действительных корней.
    b. Справедливо равенство $\sqrt{a^2-4a+4}=2-a$.
    c. Система $\begin{cases} x+y^2=a, \\ x-\sin^2 y=-3 \end{cases}$ имеет единственное решение.

    При каких значениях параметра a два из этих утверждений верны, а одно ложно?

Тригонометрия:

8. Решить уравнение $\sqrt{5-\cos 2x}=\cos x-3\sin x$
9. Решить уравнение $\dfrac{\sin 3x}{\cos 2x}+\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x}=\dfrac{2}{\sin 3x}$
10. Известно, что $a+b+c=\pi$ и $\sin a:\sin b:\sin c=4:5:6$. Найти $\cos a:\cos b:\cos c$
11. Решить уравнение $\sin \pi x^2=\sqrt{\dfrac{1}{2}-x}$
12. Известно, что уравнение $8x^3-6x-1=0$ имеет три действительных корня, не превосходящих по модулю единицы. Чему будет равен результат, если к произведению максимального и минимального корней исходного кубического уравнения прибавить половину максимального корня заданного уравнения?
13. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{3}+\cos x}{2\sin^3 x-\cos x\cdot\sin 2x}>\dfrac{3}{2\sin 4x}$.
14. Решить неравенство $(2\sin x)^{\sqrt{3}\sin x+\cos x}+4\cos^2 x>4$

Комплексные числа, алгебраические уравнения, задачи с параметрами:

15. Решить уравнение в действительных числах: $z^5-2z^4-13z^3+26z^2+36z-72=0$.
16. Найдите коэффициенты a и b, при которых многочлен ax^4+bx^3+1 делится нацело на $(x-1)^2$.
17. Число $a\neq 0$ выбрано таким образом, чтобы уравнение $x^6+(x+a)^6-a^3=0$ имело единственное решение (вещественное). Чему равно число a?
18. Подобрать такое действительное число A, чтобы корни уравнения $x^3+3x^2+A=0$ являлись тремя последовательными членами арифметической прогрессии.
19. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию: $(1-i)\cdot\bar{z}=(1+i)\cdot z$
20. Может ли точка $z=0$ принадлежать какому-нибудь многоугольнику вершины которого находятся в точках $z_k=1=z+z^2+\ldots+z^{k-1}$, $|z|<1$?